Chuyên đề

CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

I. CẤP SỐ CỘNG

1. Định nghĩa.

Dãy số (u_n) là CSC khi $u_{n+1} = u_n + d$

K/h: $\div\, u_1, u_2, \dots, u_n$

- u_n đgl số hạng tổng quát.
- u_1 số hạng đầu tiên.
- d đgl công sai.

2. Tính chất:

a. $u_n = u_1 + (n-1)d$ Tổng quát: $u_n = u_k + (n-k)d$

b. $u_k = \frac{u_{k+1}+u_{k-1}}{2}$ Tổng quát: $u_k = \frac{u_{k+m}+u_{k-m}}{2}$

c. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

Ta có: $S_n = \frac{n}{2}(u_1+u_n) = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d)$

II. CẤP SỐ NHÂN

1. Định nghĩa.

Dãy số (u_n) là CSN khi $u_{n+1} = u_n q$

K/h: $\because\, u_1, u_2, \dots, u_n$

- u_n đgl số hạng tổng quát.
- u_1 số hạng đầu tiên.
- q đgl công bội.

2. Tính chất.

a. $u_n = u_1 . q^{n-1}$ Tổng quát: $u_n = u_k . q^{n-k}$

b. $|u_k| = \sqrt{u_{k-1}u_{k+1}}$ Tổng quát: $|u_k| = \sqrt{u_{k-m}u_{k+m}}$

c. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

Ta có: $S_n = u_1 . \frac{q^n-1}{q-1}$; $(q \neq 1)$

➢ **<u>Lưu ý</u>**: *Một số t/c đối xứng của các số hạng CSC. (thường để giải các bài toán hệ của CSC dạng đối xứng)*

- 3 số hạng liên tiếp CSC: $a-d; a; a+d$
- 4 số hạng liên tiếp CSC: $a-3d; a-d; a+d; a+3d$
- 5 số hạng liên tiếp CSC: $a-2d; a-d; a; a+d; a+2d$

B. BÀI TẬP

Bài 1. Tìm tổng các số hạng của một cấp số cộng trong đó

a. $u_1 = 5, u_n = 105, n = 26$

b. $u_1 = m, u_n = 9m + 8p, n = 9$

Bài 2. Cho (u_n) là CSC

a. $u_4 = 10, u_7 = 19$ Tìm u_1, d.
b. Tổng số hạng là 28, $u_3 = 8, u_4 = 5$. Tìm u_1, u_2 và các số hạng

Bài 3. Tìm u_1 và công sai d của một CSC thỏa.

1. $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_1^2 + u_{12}^2 = 1170 \\ u_1 + u_{15} = 60 \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 14 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 94 \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 40 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 480 \end{cases}$

Lưu ý dạng toán ý 4,5 cách giải áp dụng t/c đối xứng của CSC.

Bài 4. Cho (u_n) là CSC

1. $\begin{cases} u_3 + u_7 = 6 \\ u_3 u_6 = 8 \end{cases}$ Tính $S_{16} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{16}$
2. Tổng n số hạng đầu tiên bằng nửa tổng n số hạng tiếp theo. Tính $\frac{S_{3n}}{S_n}$

Bài 5. Cho (u_n) là CSC

1. Biết $u_a = a, u_b = b$. Tính u_n theo a, b, n.
2. Tìm bốn số hạng lẻ liên tiếp biết tổng các bình phương của nó lớn hơn tổng các bình phương các số chẵn xen giữa chúng là 48.

Bài 6.

1. Tìm x từ phương trình: $1 + 4 + 7 + \cdots + x = 117$.
2. Tìm x từ phương trình: $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \cdots + (x + 28) = 155$
3. Tìm x biết ba số $10 - 3x; 2x^2 + 3; 7 - 4x$ theo thứ tự lập thành một CSC.

Bài 7. Cho a, b, c lập thành một CSC. Chứng minh

1. $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$
2. $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$
3. $3(a^2 + b^2 + c^2) = 6(a - b)^2 + (a + b + c)^2$
4. $a^2 + ab + b^2; a^2 + ac + c^2; b^2 + bc + c^2$ theo thứ tự lập thành một CSC.
5. (Với $a, b, c > 0$). $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}; \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}; \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ theo thứ tự lập thành một CSC.

Bài 8. Cho (u_n) là CSC. Chứng minh:

1. $u_p + u_q = u_m + u_n \qquad (p, q, m, n \in N$ và $p + q = m + n)$
2. $u_1 + u_p = u_q + u_{p-q+1} \qquad (p, q \in N$ và $p \geq q)$
3. $(q - r)u_p + (r - p)u_q + (p - q)u_r = 0 \qquad (p, q, r \in N)$

Bài 9. Chứng minh rằng ba số $\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ \sqrt{5}$ không thể là các số hạng của một CSC.

Bài 10. Cho (u_n) là CSN. Tìm $u_1,\ q$ biết

1. $u_3 = 15; u_5 = 135; u_6 < 0$

2. $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351 \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_1 + u_6 = 244 \\ u_3 + u_4 = 36 \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_1 + u_3 + u_5 = -21 \\ u_2 + u_4 = 10 \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_2 - u_4 + u_5 = 10 \\ u_3 - u_5 + u_6 = 20 \end{cases}$

6. $\begin{cases} u_7 - u_5 = 48 \\ u_5 + u_6 = 48 \end{cases}$

Bài 11. Cho (u_n) là CSN. Chứng minh:

1. $u_p u_q = u_m u_n$ $(p, q, m, n \in N$ và $p + q = m + n)$
2. $u_1 + u_p = u_q + u_{p-q+1}$ $(p, q \in N$ và $p \geq q)$