

THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Nguyễn Quang Sơn

I. Ôn tập kiến thức cơ bản:

ÔN TẬP 1. KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC LỚP 9 - 10

1. **Hệ thức lượng trong tam giác vuông** : cho $\triangle ABC$ vuông ở A ta có :

a) Định lý Pitago : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

b) $BA^2 = BH.BC$; $CA^2 = CH.CB$

c) $AB.AC = BC.AH$

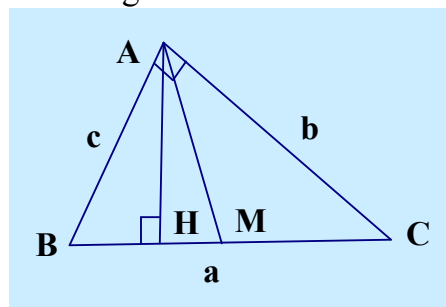
d) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

e) $BC = 2AM$

f) $\sin B = \frac{b}{a}$, $\cos B = \frac{c}{a}$, $\tan B = \frac{b}{c}$, $\cot B = \frac{c}{b}$

g) $b = a. \sin B = a. \cos C$, $c = a. \sin C = a. \cos B$, $a = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos C}$,

$b = c. \tan B = c. \cot C$



2. **Hệ thức lượng trong tam giác thường**:

* Định lý hàm số Côsin:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

* Định lý hàm số Sin:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

3. **Các công thức tính diện tích**.

a/ Công thức tính diện tích tam giác:

$$S = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} a.b \sin C = \frac{a.b.c}{4R} = p.r = \sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Đặc biệt : * $\triangle ABC$ vuông ở A : $S = \frac{1}{2} AB.AC$; * $\triangle ABC$ đều cạnh a : $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

b/ Diện tích hình vuông : $S = \text{cạnh} \times \text{cạnh}$

c/ Diện tích hình chữ nhật : $S = \text{dài} \times \text{rộng}$

d/ Diện tích hình thoi : $S = \frac{1}{2} (\text{chéo dài} \times \text{chéo ngắn})$

d/ Diện tích hình thang : $S = \frac{1}{2} (\text{đáy lớn} + \text{đáy nhỏ}) \times \text{chiều cao}$

e/ Diện tích hình bình hành : $S = \text{đáy} \times \text{chiều cao}$

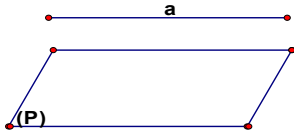
f/ Diện tích hình tròn : $S = \pi.R^2$

ÔN TẬP 2 KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC LỚP 11

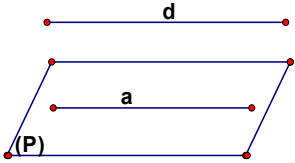
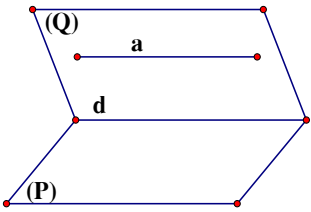
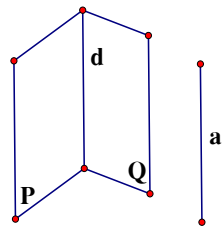
A. QUAN HỆ SONG SONG

§1. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

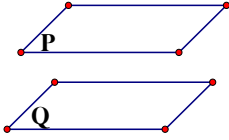
I. Định nghĩa:

Đường thẳng và mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm nào chung.	$a // (P) \Leftrightarrow a \cap (P) = \emptyset$	
---	---	---

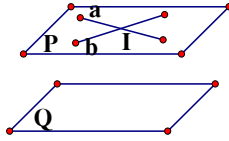
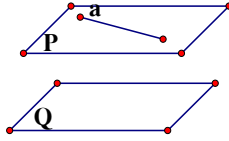
II. Các định lý:

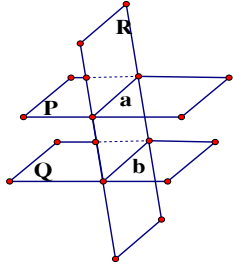
ĐL1: Nếu đường thẳng d không nằm trên $mp(P)$ và song song với đường thẳng a nằm trên $mp(P)$ thì đường thẳng d song song với $mp(P)$.	$\begin{cases} d \not\subset (P) \\ d // a \Rightarrow d // (P) \\ a \subset (P) \end{cases}$	
ĐL2: Nếu đường thẳng a song song với $mp(P)$ thì mọi $mp(Q)$ chứa a mà cắt $mp(P)$ thì cắt theo giao tuyến song song với a .	$\begin{cases} a // (P) \\ a \subset (Q) \Rightarrow d // a \\ (P) \cap (Q) = d \end{cases}$	
ĐL3: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng song song với đường thẳng đó.	$\begin{cases} (P) \cap (Q) = d \\ (P) // a \Rightarrow d // a \\ (Q) // a \end{cases}$	

§2. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG**I. Định nghĩa:**

Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm nào chung.	$(P) // (Q) \Leftrightarrow (P) \cap (Q) = \emptyset$	
---	---	---

II. Các định lý:

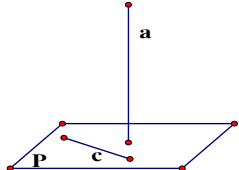
ĐL1: Nếu $mp(P)$ chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.	$\begin{cases} a, b \subset (P) \\ a \cap b = I \Rightarrow (P) // (Q) \\ a // (Q), b // (Q) \end{cases}$	
ĐL2: Nếu một đường thẳng nằm một trong hai mặt phẳng song song thì song song với mặt phẳng kia.	$\begin{cases} (P) // (Q) \Rightarrow a // (Q) \\ a \subset (P) \end{cases}$	

DL3: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.	$\begin{cases} (P) // (Q) \\ (R) \cap (P) = a \Rightarrow a // b \\ (R) \cap (Q) = b \end{cases}$	
--	---	---

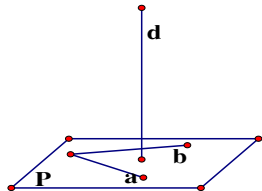
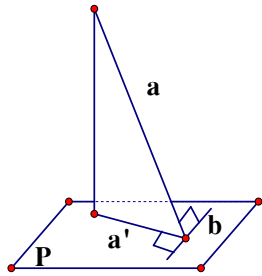
B. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

§1. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

I. Định nghĩa:

Một đường thẳng được gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng đó.	$a \perp mp(P) \Leftrightarrow a \perp c, \forall c \subset (P)$	
--	--	---

II. Các định lý:

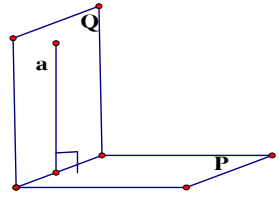
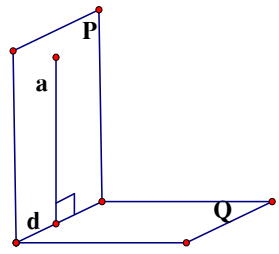
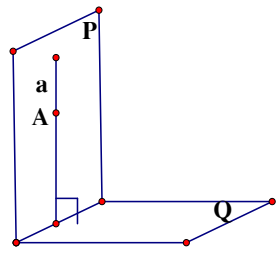
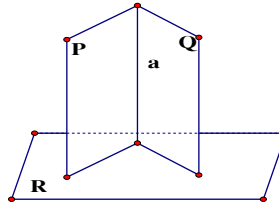
DL1: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mp(P) thì đường thẳng d vuông góc với mp(P).	$\begin{cases} d \perp a, d \perp b \\ a, b \subset mp(P) \Rightarrow d \perp mp(P) \\ a, b \text{ cắt nhau} \end{cases}$	
DL2: (Ba đường vuông góc) Cho đường thẳng a không vuông góc với mp(P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).	$\begin{aligned} a \not\perp mp(P), b \subset mp(P) \\ b \perp a \Leftrightarrow b \perp a' \end{aligned}$	

§2. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

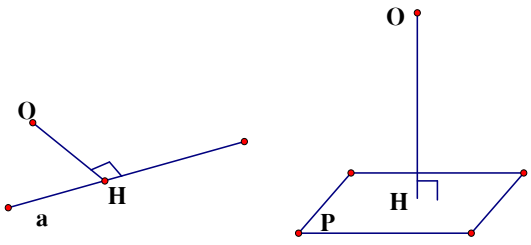
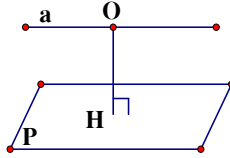
I. Định nghĩa:

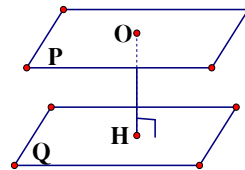
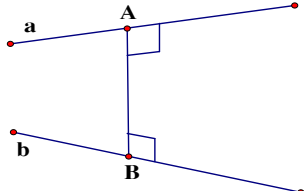
Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.
--

II. Các định lý:

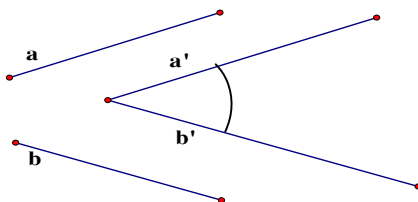
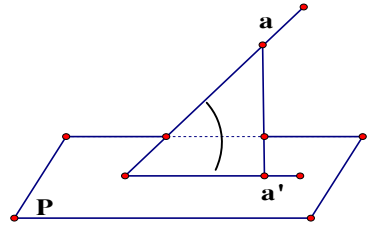
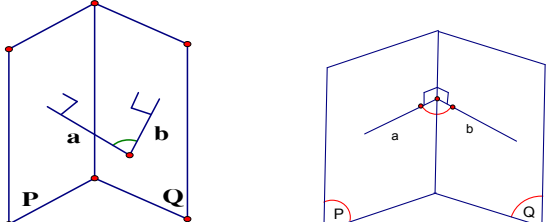
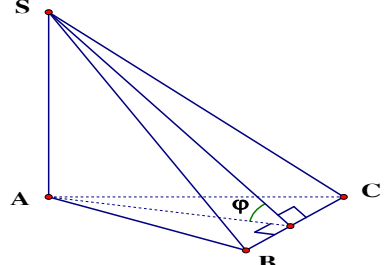
DL1: Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.	$\begin{cases} a \perp mp(P) \\ a \subset mp(Q) \end{cases} \Rightarrow mp(Q) \perp mp(P)$	
DL2: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q).	$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \\ a \subset (P), a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$	
DL3: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P).	$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ A \in a \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$	
DL4: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.	$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$	

§3. KHOẢNG CÁCH

1. Khoảng cách từ 1 điểm tới 1 đường thẳng, đến 1 mặt phẳng: Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng a (hoặc đến mặt phẳng (P)) là khoảng cách giữa hai điểm M và H, trong đó H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng a (hoặc trên mp(P)) $d(O; a) = OH; d(O; (P)) = OH$	
2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song: Khoảng cách giữa đường thẳng a và mp(P) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mp(P). $d(a; (P)) = OH$	

3. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song: là khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia. $d((P);(Q)) = OH$	
4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó. $d(a;b) = AB$	

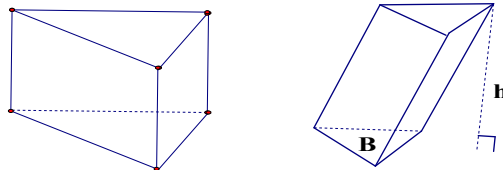
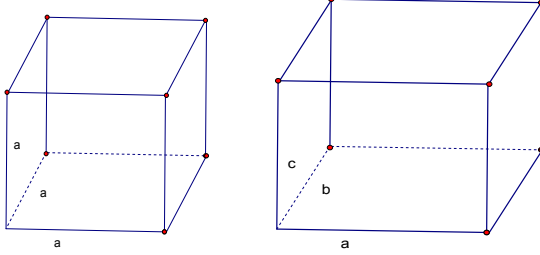
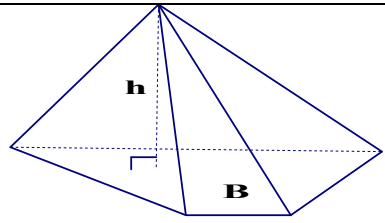
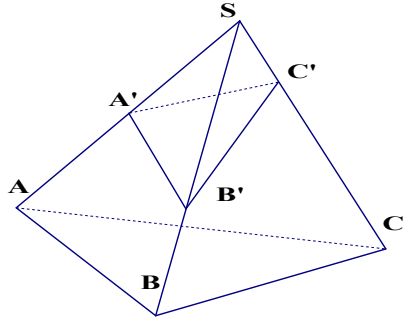
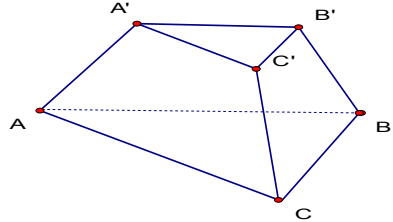
§4. GÓC

1. Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt cùng phương với a và b.	
2. Góc giữa đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) là góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên mp(P). Đặc biệt: Nếu a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mp(P) là 90°.	
3. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Hoặc là góc giữa 2 đường thẳng nằm trong 2 mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại 1 điểm	
4. Diện tích hình chiếu: Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong mp(P) và S' là diện tích hình chiếu (H') của (H) trên mp(P') thì $S' = S \cos \varphi$ trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P), (P').	

ÔN TẬP 3 **KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC LỚP 12**

A. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

I/ Các công thức thể tích của khối đa diện:

1. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ: $V = B.h$ với $\begin{cases} B : \text{diện tích đáy} \\ h : \text{chiều cao} \end{cases}$	
a) Thể tích khối hộp chữ nhật: $V = a.b.c$ với a, b, c là ba kích thước b) Thể tích khối lập phương: $V = a^3$ với a là độ dài cạnh	
2. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP: $V = \frac{1}{3} B.h$ với $\begin{cases} B : \text{diện tích đáy} \\ h : \text{chiều cao} \end{cases}$	
3. TỈ SỐ THỂ TÍCH TỨ DIỆN: Cho khối tứ diện SABC và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC ta có: $\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}$	
4. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CỤT: $V = \frac{h}{3} (B + B' + \sqrt{BB'})$ với $\begin{cases} B, B' : \text{diện tích hai đáy} \\ h : \text{chiều cao} \end{cases}$	

Chú ý:

1/ Đường chéo của hình vuông cạnh a là $d = a\sqrt{2}$,

Đường chéo của hình lập phương cạnh a là $d = a\sqrt{3}$,

Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c là $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,

2/ Đường cao của tam giác đều cạnh a là $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

3/ Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên đều bằng nhau (hoặc có đáy là đa giác đều, hình chiếu của đỉnh trùng với tâm của đáy).

4/ Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

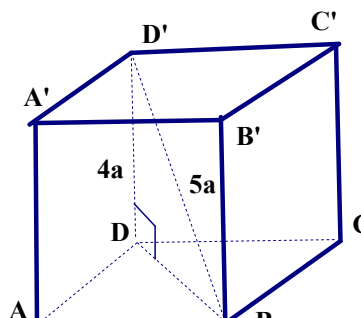
II/ Bài tập:

Nội dung chínhLOẠI 1: **THỂ TÍCH LĂNG TRỤ**1) Dạng 1: **Khối lăng trụ đứng có chiều cao hay cạnh đáy**

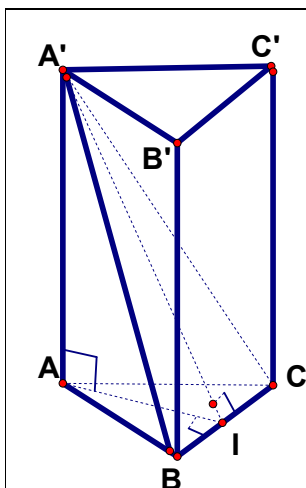
Ví dụ 1: Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh $BC = a\sqrt{2}$ và biết $A'B = 3a$. Tính thể tích khối lăng trụ.

$a\sqrt{2}$	<u>Lời giải:</u> Ta có $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $AB = AC = a$ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng $\Rightarrow AA' \perp AB$ $\triangle AA'B \Rightarrow AA'^2 = A'B^2 - AB^2 = 8a^2$ $\Rightarrow AA' = 2a\sqrt{2}$ Vậy $V = B.h = S_{ABC} .AA' = a^3\sqrt{2}$

Ví dụ 2: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng $4a$ và đường chéo $5a$. Tính thể tích khối lăng trụ này.

?	
	<u>Lời giải:</u> $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng nên $BD^2 = BD'^2 - DD'^2 = 9a^2 \Rightarrow BD = 3a$ $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB = \frac{3a}{\sqrt{2}}$ Suy ra $B = S_{ABCD} = \frac{9a^2}{4}$ Vậy $V = B.h = S_{ABCD} .AA' = 9a^3$

Ví dụ 3: Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác đều cạnh $a = 4$ và biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng 8 . Tính thể tích khối lăng trụ.



Lời giải:

Gọi I là trung điểm BC. Ta có $\triangle ABC$ đều nên

$$AI = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ \& } AI \perp BC$$

$$\Rightarrow A'I \perp BC \text{ (dl3 \&)}$$

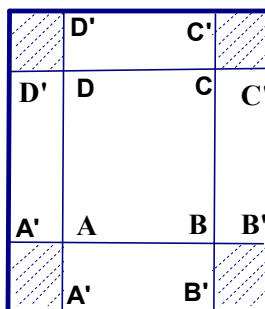
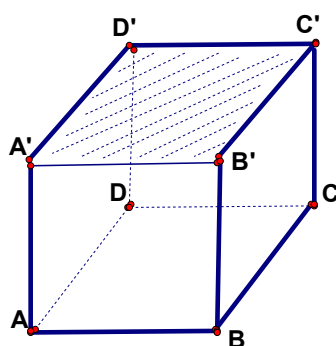
$$S_{A'BC} = \frac{1}{2} BC \cdot A'I \Rightarrow A'I = \frac{2S_{A'BC}}{BC} = 4$$

$$AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp AI.$$

$$\triangle A'AI \Rightarrow AA' = \sqrt{A'I^2 - AI^2} = 2$$

$$\text{Vậy: } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = 8\sqrt{3}$$

Ví dụ 4: Một tấm bìa hình vuông có cạnh 44 cm, người ta cắt bỏ đi ở mỗi góc tấm bìa một hình vuông cạnh 12 cm rồi gấp lại thành một cái hộp chữ nhật không có nắp. Tính thể tích cái hộp này.

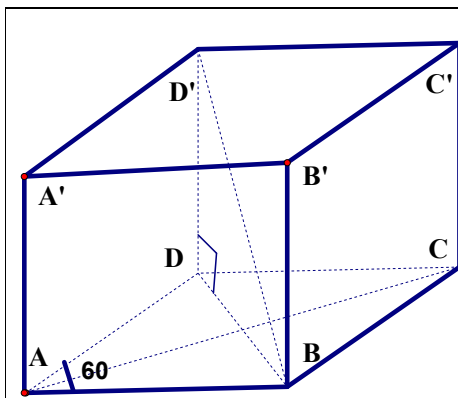


Giải

Theo đề bài, ta có $AA' = BB' = CC' = DD' = 12$ cm nên ABCD là hình vuông có $AB = 44 \text{ cm} - 24 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$ và chiều cao hộp $h = 12$ cm

$$\text{Vậy thể tích hộp là } V = S_{ABCD} \cdot h = 4800 \text{ cm}^3$$

Ví dụ 5: Cho hình hộp đứng có đáy là hình thoi cạnh a và có góc nhọn bằng 60° . Đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của lăng trụ. Tính thể tích hình hộp.



Lời giải:

Ta có tam giác ABD đều nên: $BD = a$

$$\text{và } S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Theo đề bài } BD' = AC = 2 \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

$$\triangle DD'B \Rightarrow DD' = \sqrt{BD'^2 - BD^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } V = S_{ABCD} \cdot DD' = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều biết rằng tất cả các cạnh của lăng trụ bằng a . Tính thể tích và tổng diện tích các mặt bên của lăng trụ.

$$\text{ĐS: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} ; S = 3a^2$$

Bài 2: Cho lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là tứ giác đều cạnh a biết rằng $BD' = a\sqrt{6}$. Tính thể tích của lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = 2a^3$$

Bài 3: Cho lăng trụ đứng tứ giác có đáy là hình thoi mà các đường chéo là 6cm và 8cm biết rằng chu vi đáy bằng 2 lần chiều cao lăng trụ. Tính thể tích và tổng diện tích các mặt của lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = 240\text{cm}^3 \text{ và } S = 248\text{cm}^2$$

Bài 4: Cho lăng trụ đứng tam giác có độ dài các cạnh đáy là 37cm ; 13cm ; 30cm và biết tổng diện tích các mặt bên là 480 cm^2 . Tính thể tích lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = 1080\text{ cm}^3$$

Bài 5: Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, biết rằng chiều cao lăng trụ là $3a$ và mặt bên AA'B'B có đường chéo là $5a$. Tính thể tích lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = 24a^3$$

Bài 6: Cho lăng trụ đứng tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau và biết tổng diện tích các mặt của lăng trụ bằng 96 cm^2 . Tính thể tích lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = 64\text{ cm}^3$$

Bài 7: Cho lăng trụ đứng tam giác có các cạnh đáy là 19, 20, 37 và chiều cao của khối lăng trụ bằng trung bình cộng các cạnh đáy. Tính thể tích của lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = 2888$$

Bài 8: Cho khối lập phương có tổng diện tích các mặt bằng 24 m^2 . Tính thể tích khối lập phương

$$\text{Đs: } V = 8\text{ m}^3$$

Bài 9: Cho hình hộp chữ nhật có 3 kích thước tỉ lệ thuận với 3, 4, 5 biết rằng độ dài một đường chéo của hình hộp là 1 m. Tính thể tích khối hộp chữ nhật.

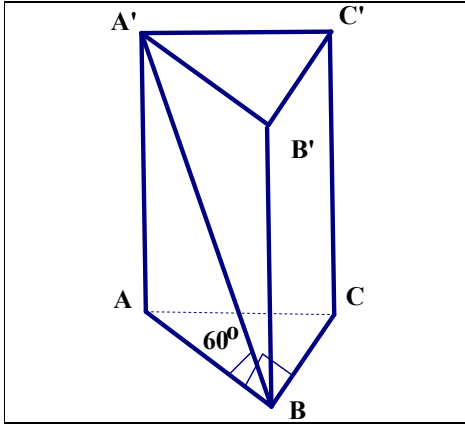
$$\text{Đs: } V = 0,4\text{ m}^3$$

Bài 10: Cho hình hộp chữ nhật biết rằng các đường chéo của các mặt lần lượt là $\sqrt{5}; \sqrt{10}; \sqrt{13}$. Tính thể tích khối hộp này.

$$\text{Đs: } V = 6$$

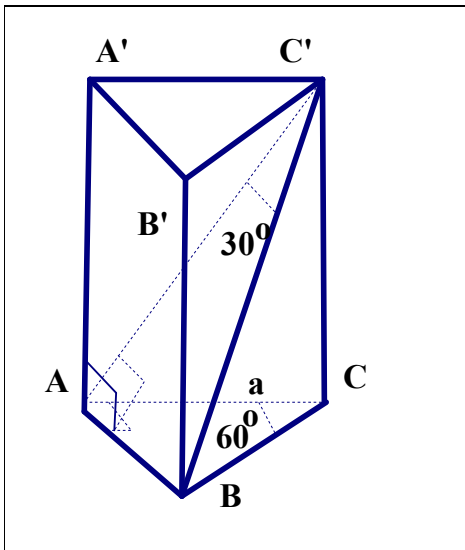
2) **Dạng 2:** Lăng trụ đứng có góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Ví dụ 1: Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$, biết A'B hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích lăng trụ.



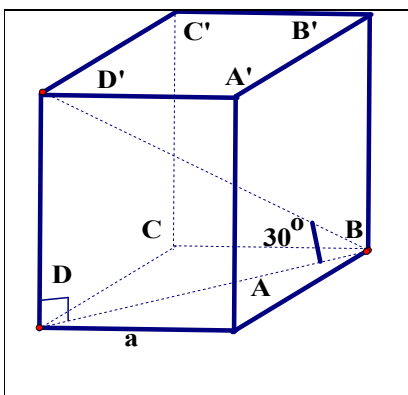
Lời giải:
 Ta có $A'A \perp (ABC) \Rightarrow A'A \perp AB$ & AB là hình chiếu của $A'B$ trên đáy ABC .
 Vậy $\text{góc}[A'B, (ABC)] = \widehat{ABA'} = 60^\circ$
 $\triangle ABA' \Rightarrow AA' = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$
 $S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2}{2}$
 Vậy $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Ví dụ 2: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$ biết BC' hợp với $(AA'C'C)$ một góc 30° . Tính AC' và thể tích lăng trụ.



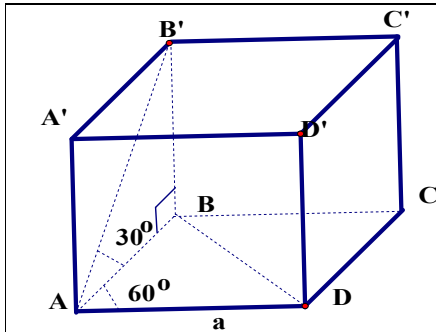
Lời giải: $\triangle ABC \Rightarrow AB = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.
 Ta có:
 $AB \perp AC$; $AB \perp AA' \Rightarrow AB \perp (AA'C'C)$
 nên AC' là hình chiếu của BC' trên $(AA'C'C)$.
 Vậy $\text{góc}[BC', (AA'C'C)] = \widehat{BC'A} = 30^\circ$
 $\triangle AC'B \Rightarrow AC' = \frac{AB}{\tan 30^\circ} = 3a$
 $V = B \cdot h = S_{ABC} \cdot AA'$
 $\triangle AA'C' \Rightarrow AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = 2a\sqrt{2}$
 $\triangle ABC$ là nửa tam giác đều nên $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
 Vậy $V = a^3\sqrt{6}$

Ví dụ 3: Cho lăng trụ đứng $ABCD A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và đường chéo BD' của lăng trụ hợp với đáy $ABCD$ một góc 30° . Tính thể tích và tổng diện tích của các mặt bên của lăng trụ.



Giải:
 Ta có $ABCD A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng nên ta có: $DD' \perp (ABCD) \Rightarrow DD' \perp BD$ và BD là hình chiếu của BD' trên $ABCD$.
 Vậy $\text{góc}[BD', (ABCD)] = \widehat{DBD'} = 30^\circ$
 $\triangle BDD' \Rightarrow DD' = BD \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{3}$
 Vậy $V = S_{ABCD} \cdot DD' = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ $S = 4S_{ADD'A'} = \frac{4a^2\sqrt{6}}{3}$

Ví dụ 4: Cho hình hộp đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ biết AB' hợp với đáy (ABCD) một góc 30° . Tính thể tích của hình hộp.



Giải

$$\triangle ABD \text{ đều cạnh } a \Rightarrow S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle ABB' \text{ vuông tại } B \Rightarrow BB' = AB \tan 30^\circ = a\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } V = B.h = S_{ABCD} \cdot BB' = \frac{3a^3}{2}$$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho lăng trụ đứng ABC A'B'C' có đáy ABC vuông cân tại B biết A'C = a và A'C hợp với mặt bên (AA'B'B) một góc 30° . Tính thể tích lăng trụ

$$\text{ĐS: } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{16}$$

Bài 2: Cho lăng trụ đứng ABC A'B'C' có đáy ABC vuông tại B biết BB' = AB = a và B'C hợp với đáy (ABC) một góc 30° . Tính thể tích lăng trụ.

$$\text{ĐS: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$

Bài 3: Cho lăng trụ đứng ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết AB' hợp với mặt bên (BCC'B') một góc 30° .

Tính độ dài AB' và thể tích lăng trụ. $\text{ĐS: } AB' = a\sqrt{3}; V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Bài 4: Cho lăng trụ đứng ABC A'B'C' có đáy ABC vuông tại A biết AC = a và $\widehat{ACB} = 60^\circ$ biết BC' hợp với mặt bên (AA'C'C) một góc 30° .

Tính thể tích lăng trụ và diện tích tam giác ABC'. $\text{ĐS: } V = a^3\sqrt{6}, S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

Bài 5: Cho lăng trụ tam giác đều ABC A'B'C' có khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A'BC) bằng a và AA' hợp với mặt phẳng (A'BC) một góc 30° .

Tính thể tích lăng trụ $\text{ĐS: } V = \frac{32a^3}{9}$

Bài 6: Cho hình hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D' có đường chéo A'C = a và biết rằng A'C hợp với (ABCD) một góc 30° và hợp với (ABB'A') một góc 45° .

Tính thể tích của khối hộp chữ nhật. $\text{ĐS: } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$

Bài 7: Cho hình hộp đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông. Gọi O là tâm của ABCD và OA' = a. Tính thể tích của khối hộp khi:

1) ABCD A'B'C'D' là khối lập phương.

2) OA' hợp với đáy $ABCD$ một góc 60° .

3) $A'B$ hợp với $(AA'CC')$ một góc 30° .

$$\text{Đs: 1) } V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{9}; 2) V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}; 3) V = \frac{4a^3\sqrt{3}}{9}$$

Bài 8: Cho lăng trụ đứng $ABCD A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $BD' = a$. Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:

1) BD' hợp với đáy $ABCD$ một góc 60° .

2) BD' hợp với mặt bên $(AA'D'D)$ một góc 30° . Đs: 1) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$ 2) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$

Bài 9: Chiều cao của lăng trụ tứ giác đều bằng a và góc của 2 đường chéo phát xuất từ một đỉnh của 2 mặt bên kề nhau là 60° . Tính thể tích lăng trụ và tổng diện tích các mặt của lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = a^3 \text{ và } S = 6a^2$$

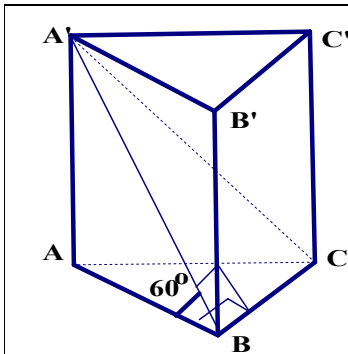
Bài 10: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD A'B'C'D'$ có $AB = a$; $AD = b$; $AA' = c$ và $BD' = AC' = CA' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

1) Chứng minh $ABCD A'B'C'D'$ là hộp chữ nhật.

2) Gọi x, y, z là góc hợp bởi một đường chéo và 3 mặt cùng đi qua một đỉnh thuộc đường chéo. Chứng minh rằng $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 1$.

3) Dạng 3: Lăng trụ đứng có góc giữa 2 mặt phẳng

Ví dụ 1: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$, biết $(A'BC)$ hợp với đáy (ABC) một góc 60° . Tính thể tích lăng trụ.



Lời giải:

Ta có $A'A \perp (ABC)$ & $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp A'B$

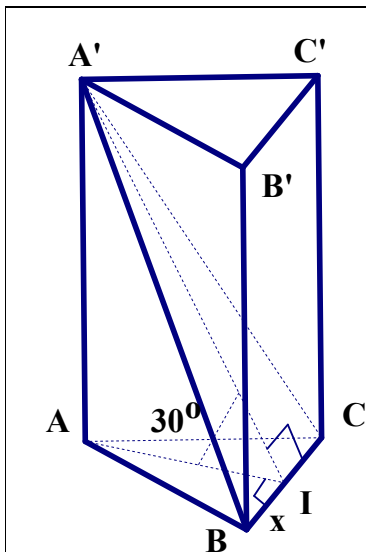
Vậy góc $[(A'BC), (ABC)] = \widehat{ABA'} = 60^\circ$

$$\triangle ABA' \Rightarrow AA' = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Vậy } V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$

Ví dụ 2: Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC A'B'C'$ là tam giác đều. Mặt $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30° và diện tích tam giác $A'BC$ bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.



Giải: $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow AI \perp BC$ mà $AA' \perp (ABC)$ nên $A'I \perp BC$ (đl 3 $\perp$).

Vậy góc $[(A'BC); (ABC)] = \widehat{A'IA} = 30^\circ$

Giả sử $BI = x \Rightarrow AI = \frac{2x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3}$. Ta có

$$\triangle A'AI : A'I = AI : \cos 30^\circ = \frac{2AI}{\sqrt{3}} = \frac{2x\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2x$$

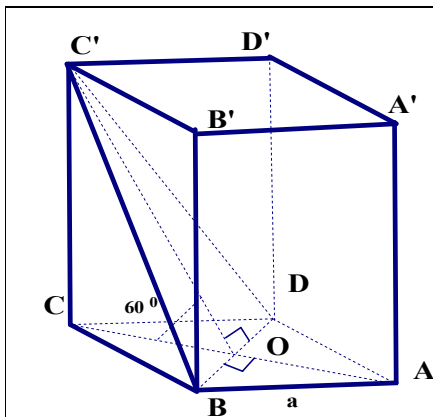
$$A'A = AI \cdot \tan 30^\circ = x\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = x$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = CI \cdot AI \cdot A'A = x^3 \sqrt{3}$$

$$\text{Mà } S_{A'BC} = BI \cdot A'I = x \cdot 2x = 8 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{Do đó } V_{ABC.A'B'C'} = 8\sqrt{3}$$

Ví dụ 3: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy a và mặt phẳng (BDC') hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Tính thể tích khối hộp chữ nhật.



Gọi O là tâm của $ABCD$. Ta có

$ABCD$ là hình vuông nên $OC \perp BD$

$CC' \perp (ABCD)$ nên $OC' \perp BD$ (đl 3 $\perp$). Vậy

góc $[(BDC'); (ABCD)] = \widehat{COC'} = 60^\circ$

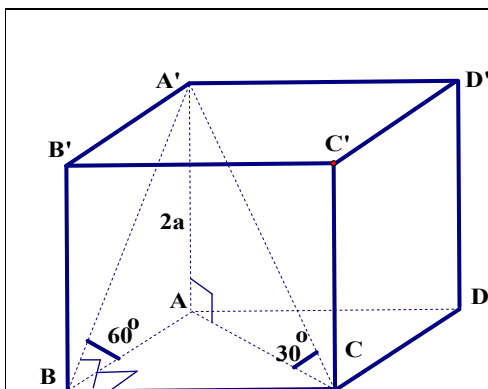
Ta có $V = B \cdot h = S_{ABCD} \cdot CC'$

$ABCD$ là hình vuông nên $S_{ABCD} = a^2$

$$\triangle OCC' \text{ vuông nên } CC' = OC \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$$

Ví dụ 4: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = 2a$; mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 60° và $A'C$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 30° . Tính thể tích khối hộp chữ nhật.



Ta có $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của $A'C$ trên $(ABCD)$.

Vậy góc $[A'C, (ABCD)] = \widehat{A'CA} = 30^\circ$

$BC \perp AB \Rightarrow BC \perp A'B$ (đl 3 $\perp$).

Vậy góc $[(A'BC), (ABCD)] = \widehat{A'BA} = 60^\circ$

$$\triangle A'AC \Rightarrow AC = AA' \cdot \cot 30^\circ = 2a\sqrt{3}$$

$$\triangle A'AB \Rightarrow AB = AA' \cdot \cot 60^\circ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\triangle ABC \Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \frac{4a\sqrt{6}}{3}$$

	$\text{Vậy } V = AB \cdot BC \cdot AA' = \frac{16a^3\sqrt{2}}{3}$
--	---

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D' có AA' = a biết đường chéo A'C hợp với đáy ABCD một góc 30° và mặt (A'BC) hợp với đáy ABCD một góc 60° . Tính thể

tích hộp chữ nhật.

$$\text{Đs: } V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$$

Bài 2: Cho lăng trụ đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông và cạnh bên bằng a biết rằng mặt (ABC'D') hợp với đáy một góc 30° . Tính thể tích khối lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = 3a^3$$

Bài 3: Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và AC = 2a biết rằng (A'BC) hợp với đáy ABC một góc 45° . Tính thể tích lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = a^3\sqrt{2}$$

Bài 4: Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác cân tại A với AB = AC = a và $\widehat{BAC} = 120^\circ$ biết rằng (A'BC) hợp với đáy ABC một góc 45° . Tính thể

tích lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$$

Bài 5: Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B và BB' = AB = h biết rằng (B'AC) hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích lăng

trụ.

$$\text{Đs: } V = \frac{h^3\sqrt{2}}{4}$$

Bài 6: Cho lăng trụ đứng ABC A'B'C' có đáy ABC đều biết cạnh bên AA' = a Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:

- 1) Mặt phẳng (A'BC) hợp với đáy ABC một góc 60° .
- 2) A'B hợp với đáy ABC một góc 45° .
- 3) Chiều cao kẻ từ A' của tam giác A'BC bằng độ dài cạnh đáy của lăng trụ.

$$\text{Đs: 1) } V = a^3\sqrt{3} ; 2) V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} ; 3) V = a^3\sqrt{3}$$

Bài 7: Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD A'B'C'D' có cạnh bên AA' = 2a. Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:

- 1) Mặt (ACD') hợp với đáy ABCD một góc 45° .
- 2) BD' hợp với đáy ABCD một góc 60° .
- 3) Khoảng cách từ D đến mặt (ACD') bằng a.

$$\text{Đs: 1) } V = 16a^3 . 2) V = 12a^3 . 3) V = \frac{16a^3}{3}$$

Bài 8: Cho lăng trụ đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông cạnh a Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:

- 1) Mặt phẳng (BDC') hợp với đáy ABCD một góc 60° .
- 2) Tam giác BDC' là tam giác đều.
- 3) AC' hợp với đáy ABCD một góc 45°

$$\text{Đs: 1) } V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2} ; 2) V = a^3 ; 3) V = a^3\sqrt{2}$$

Bài 9: Cho lăng trụ đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và góc nhọn A = 60° . Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:

1) Mặt phẳng (BDC') hợp với đáy ABCD một góc 60° .

2) Khoảng cách từ C đến (BDC') bằng $\frac{a}{2}$

3) AC' hợp với đáy ABCD một góc 45°

$$\text{Đs: 1) } V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4} ; 2) V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{8} ; V = \frac{3a^3}{2}$$

Bài 10: Cho hình hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D' có $BD' = 5a$, $BD = 3a$

Tính thể tích khối hộp trong các trường hợp sau đây:

1) $AB = a$

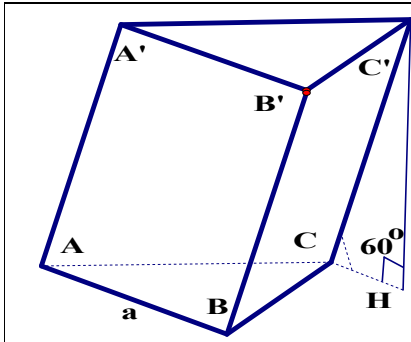
2) BD' hợp với $AA'D'D$ một góc 30°

3) (ABD') hợp với đáy ABCD một góc 30°

$$\text{Đs: 1) } V = 8a^3\sqrt{2} ; 2) V = 5a^3\sqrt{11} ; V = 16a^3$$

4) **Dạng 4:** **Khối lăng trụ xiên**

Ví dụ 1: Cho lăng trụ xiên tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , biết cạnh bên là $a\sqrt{3}$ và hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích lăng trụ.



Lời giải:

Ta có $C'H \perp (ABC) \Rightarrow CH$ là hình chiếu của CC' trên (ABC)

Vậy $\text{góc}[CC', (ABC)] = \widehat{C'CH} = 60^\circ$

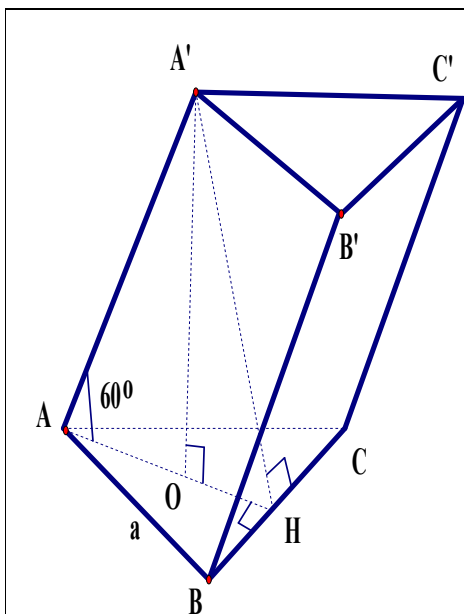
$$\triangle CHC' \Rightarrow C'H = CC' \cdot \sin 60^\circ = \frac{3a}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \text{ Vậy } V = S_{ABC} \cdot C'H = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$$

Ví dụ 2: Cho lăng trụ xiên tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu của A' xuống (ABC) là tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết AA' hợp với đáy ABC một góc 60° .

1) Chứng minh rằng $BB'C'C$ là hình chữ nhật.

2) Tính thể tích lăng trụ.



Lời giải:

1) Ta có $A'O \perp (ABC) \Rightarrow OA$ là hình chiếu của AA' trên (ABC)

Vậy góc $[AA', (ABC)] = \widehat{OAA'} = 60^\circ$

Ta có $BB'CC'$ là hình bình hành (vì mặt bên của lăng trụ)

$AO \perp BC$ tại trung điểm H của BC nên $BC \perp A'H$ (đl 3 $\perp$)

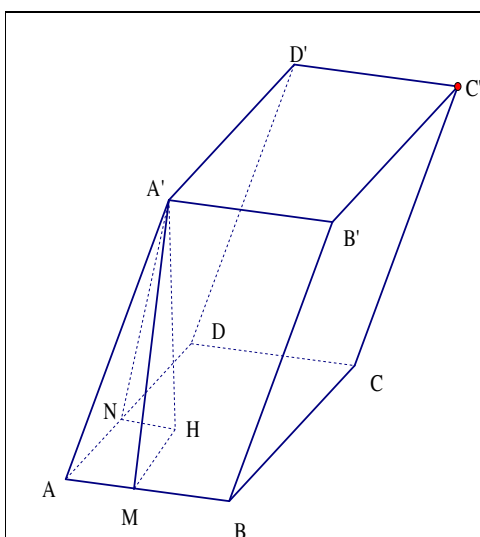
$\Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA'$ mà $AA' // BB'$ nên $BC \perp BB'$. Vậy $BB'CC'$ là hình chữ nhật.

2) $\triangle ABC$ đều nên $AO = \frac{2}{3} AH = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\triangle AOA' \Rightarrow A'O = AO \tan 60^\circ = a$

Vậy $V = S_{ABC} \cdot A'O = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$

Ví dụ 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{3}$ $AD = \sqrt{7}$. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với đáy những góc 45° và 60° . Tính thể tích khối hộp nếu biết cạnh bên bằng 1.



Lời giải:

Kẻ $A'H \perp (ABCD)$, $HM \perp AB$, $HN \perp AD$
 $\Rightarrow A'M \perp AB$, $A'N \perp AD$ (đl 3 $\perp$)

$\Rightarrow \widehat{A'MH} = 45^\circ$, $\widehat{A'NH} = 60^\circ$

Đặt $A'H = x$. Khi đó

$$A'N = x : \sin 60^\circ = \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

$$AN = \sqrt{AA'^2 - A'N^2} = \sqrt{\frac{3-4x^2}{3}} = HM$$

$$\text{Mà } HM = x \cdot \cot 45^\circ = x$$

$$\text{Nghĩa là } x = \sqrt{\frac{3-4x^2}{3}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB \cdot AD \cdot x$$

$$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = 3$$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho lăng trụ $ABC A'B'C'$ có các cạnh đáy là 13;14;15 và biết cạnh bên bằng 2a hợp với đáy $ABCD$ một góc 45° . Tính thể tích lăng trụ. Đs: $V = a^3\sqrt{2}$

Bài 2: Cho lăng trụ $ABCD A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và biết cạnh bên bằng 8 hợp với đáy ABC một góc 30° . Tính thể tích lăng trụ. Đs: $V = 336$

Bài 3: Cho hình hộp $ABCD A'B'C'D'$ có $AB = a; AD = b; AA' = c$ và $\widehat{BAD} = 30^\circ$ và biết cạnh bên AA' hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích lăng trụ.

Bài 4: Cho lăng trụ tam giác $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và điểm A' cách đều A, B, C biết $AA' = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích lăng trụ. Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Bài 5: Cho lăng trụ $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, đỉnh A' có hình chiếu trên (ABC) nằm trên đường cao AH của tam giác ABC biết mặt bên $BB'C'C$ hợp với đáy ABC một góc 60° .

1) Chứng minh rằng $BB'C'C$ là hình chữ nhật.

2) Tính thể tích lăng trụ $ABC A'B'C'$. Đs: $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Bài 6: Cho lăng trụ $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều với tâm O . Cạnh $BC' = a$ hợp với đáy ABC 1 góc 60° và C' có hình chiếu trên ABC trùng với O .

1) Chứng minh rằng $AA'B'B$ là hình chữ nhật. Tính diện tích $AA'B'B$.

2) Tính thể tích lăng trụ $ABCA'B'C'$. Đs: 1) $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ 2) $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Bài 7: Cho lăng trụ $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết chân đường vuông góc hạ từ A' trên ABC trùng với trung điểm của BC và $AA' = a$.

1) Tìm góc hợp bởi cạnh bên với đáy lăng trụ.

2) Tính thể tích lăng trụ. Đs: 1) 30° 2) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Bài 8: Cho lăng trụ xiên $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều với tâm O . Hình chiếu của C' trên (ABC) là O . Tính thể tích của lăng trụ biết rằng khoảng cách từ O đến CC' là a và 2 mặt bên $AA'C'C$ và $BB'C'C$ hợp với nhau một góc 90°

$$\text{Đs: } V = \frac{27a^3}{4\sqrt{2}}$$

Bài 9: Cho hình hộp $ABCD A'B'C'D'$ có 6 mặt là hình thoi cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' trên $(ABCD)$ nằm trong hình thoi, các cạnh xuất phát từ A của hộp đôi một tạo với nhau một góc 60° .

1) Chứng minh rằng H nằm trên đường chéo AC của $ABCD$.

2) Tính diện tích các mặt chéo $ACC'A'$ và $BDD'B'$.

3) Tính thể tích của hộp. Đs: 2) $S_{ACC'A'} = a^2\sqrt{2}; S_{BDD'B'} = a^2$. 3) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Bài 10: Cho hình hộp $ABCD A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc $A = 60^\circ$ chân đường vuông góc hạ từ B' xuống $ABCD$ trùng với giao điểm 2 đường chéo đáy biết $BB' = a$.

1) Tìm góc hợp bởi cạnh bên và đáy.

2) Tính thể tích và tổng diện tích các mặt bên của hình hộp.

$$\text{Đs: } 1) 60^\circ \quad 2) V = \frac{3a^3}{4} \text{ \& } S = a^2\sqrt{15}$$

LOẠI 2: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

1) **Dạng 1:** **Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy**

Ví dụ 1: Cho hình chóp SABC có $SB = SC = BC = CA = a$. Hai mặt (ABC) và (ASC) cùng vuông góc với (SBC). Tính thể tích hình chóp.

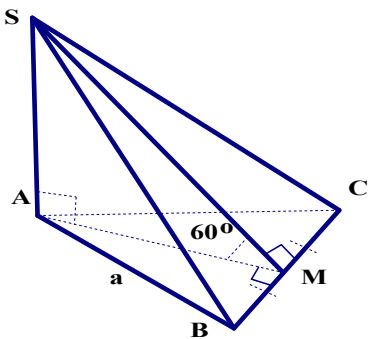
	<u>Lời giải:</u> Ta có $\begin{cases} (ABC) \perp (SBC) \\ (ASC) \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBC)$ Do đó $V = \frac{1}{3} S_{SBC} \cdot AC = \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$
--	---

Ví dụ 2: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $AC = a$ biết SA vuông góc với đáy ABC và SB hợp với đáy một góc 60° .

- 1) Chứng minh các mặt bên là tam giác vuông.
- 2) Tính thể tích hình chóp.

	<u>Lời giải:</u> 1) $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB \text{ \& } SA \perp AC$ mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp SB$ (đl 3 $\perp$). Vậy các mặt bên chóp là tam giác vuông. 2) Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên (ABC). Vậy góc $[SB, (ABC)] = \widehat{SAB} = 60^\circ$. $\triangle ABC$ vuông cân nên $BA = BC = \frac{a}{\sqrt{2}}$ $S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2}{4}$ $\triangle SAB \Rightarrow SA = AB \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ Vậy $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \frac{a^2}{4} \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{24}$
--	--

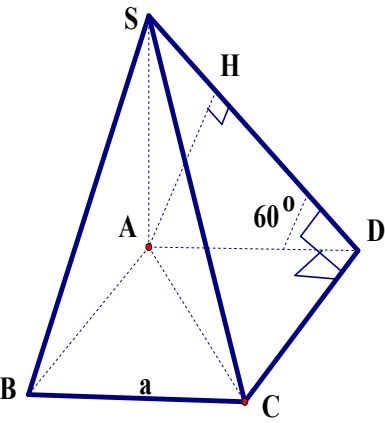
Ví dụ 3: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết SA vuông góc với đáy ABC và (SBC) hợp với đáy (ABC) một góc 60° . Tính thể tích hình chóp.



Lời giải: M là trung điểm của BC, vì tam giác ABC đều nên $AM \perp BC \Rightarrow SA \perp BC$ (đl3 $\perp$).
 Vậy góc $[(SBC); (ABC)] = \widehat{SMA} = 60^\circ$.
 Ta có $V = \frac{1}{3} B.h = \frac{1}{3} S_{ABC} . SA$
 $\Delta SAM \Rightarrow SA = AM \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$
 Vậy $V = \frac{1}{3} B.h = \frac{1}{3} S_{ABC} . SA = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8}$

Ví dụ 4: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a và SA vuông góc đáy ABCD và mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc 60° .

- 1) Tính thể tích hình chóp SABCD.
- 2) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).



Lời giải: 1) Ta có $SA \perp (ABC)$ và $CD \perp AD \Rightarrow CD \perp SD$ (đl3 $\perp$). (1)
 Vậy góc $[(SCD); (ABCD)] = \widehat{SDA} = 60^\circ$.
 ΔSAD vuông nên $SA = AD . \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$
 Vậy $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} . SA = \frac{1}{3} a^2 a\sqrt{3} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$
 2) Ta dựng $AH \perp SD$, vì $CD \perp (SAD)$ (do (1)) nên $CD \perp AH \Rightarrow AH \perp (SCD)$
 Vậy AH là khoảng cách từ A đến (SCD).
 $\Delta SAD \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2}$
 Vậy $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA=BC=a$ biết SA vuông góc với đáy ABC và SB hợp với (SAB) một góc 30° .

Tính thể tích hình chóp . Đs: $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$

Bài 2: Cho hình chóp SABC có SA vuông góc với đáy (ABC) và $SA = h$, biết rằng tam giác ABC đều và mặt (SBC) hợp với đáy ABC một góc 30° . Tính thể tích khối chóp SABC . Đs: $V = \frac{h^3 \sqrt{3}}{3}$

Bài 3: Cho hình chóp SABC có đáy ABC vuông tại A và SB vuông góc với đáy ABC biết $SB = a$, SC hợp với (SAB) một góc 30° và (SAC) hợp với (ABC) một góc 60° . Chứng minh rằng $SC^2 = SB^2 + AB^2 + AC^2$ Tính thể tích hình chóp.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{27}$$

Bài 4: Cho tứ diện ABCD có $AD \perp (ABC)$ biết $AC = AD = 4 \text{ cm}$, $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$.

1) Tính thể tích ABCD.

$$\text{Đs: } V = 8 \text{ cm}^3$$

2) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).

$$\text{Đs: } d = \frac{12}{\sqrt{34}}$$

Bài 5: Cho khối chóp SABC có đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC = 2a$, góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$, biết $SA \perp (ABC)$ và mặt (SBC) hợp với đáy một góc 45° . Tính thể tích khối chóp SABC.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3}{9}$$

Bài 6: Cho khối chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông biết $SA \perp (ABCD)$, $SC = a$ và SC hợp với đáy một góc 60° Tính thể tích khối chóp.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{48}$$

Bài 7: Cho khối chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật biết rằng

$SA \perp (ABCD)$, SC hợp với đáy một góc 45° và $AB = 3a$, $BC = 4a$

Tính thể tích khối chóp.

$$\text{Đs: } V = 20a^3$$

Bài 8: Cho khối chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và góc nhọn A bằng 60° và $SA \perp (ABCD)$, biết rằng khoảng cách từ A đến cạnh SC = a.

Tính thể tích khối chóp SABCD.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{4}$$

Bài 9: Cho khối chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và (SCD) hợp với đáy một góc 60°

Tính thể tích khối chóp SABCD.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{2}$$

Bài 10 : Cho khối chóp SABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ biết mặt (SBC) hợp với đáy ABCD một góc 45° . Tính thể tích khối chóp SABCD.

$$\text{Đs: } V = \frac{3R^3}{4}$$

2) Dạng 2: **Khối chóp có một mặt bên vuông góc với đáy**

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a
Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ABCD,
1) Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AB.
2) Tính thể tích khối chóp SABCD.

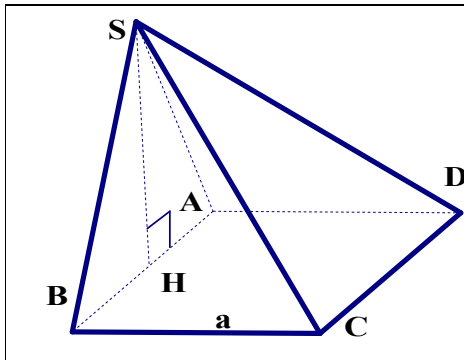
Lời giải:

1) Gọi H là trung điểm của AB.

$\triangle SAB$ đều $\Rightarrow SH \perp AB$

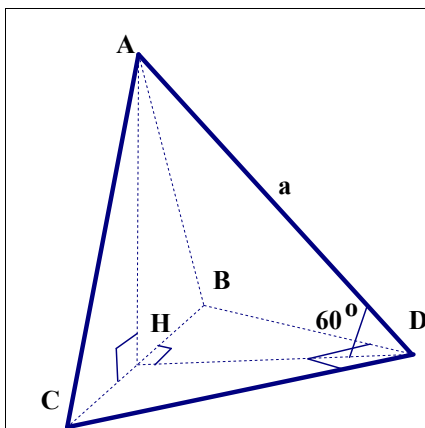
mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Vậy H là chân đường cao của khối chóp.



2) Ta có tam giác SAB đều nên $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
 suy ra $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Ví dụ 2: Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác đều, BCD là tam giác vuông cân tại D, $(ABC) \perp (BCD)$ và AD hợp với (BCD) một góc 60° .
 Tính thể tích tứ diện ABCD.



Lời giải:

Gọi H là trung điểm của BC.
 Ta có tam giác ABC đều nên $AH \perp (BCD)$,
 mà $(ABC) \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp (BCD)$.

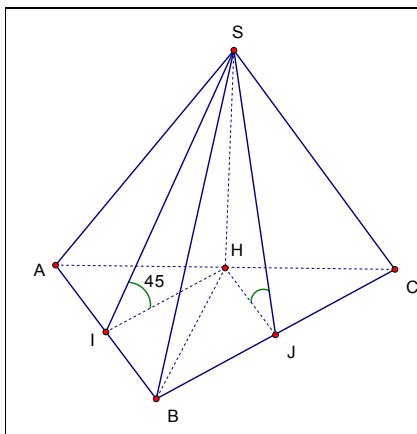
Ta có $AH \perp HD \Rightarrow AH = AD \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$
 & $HD = AD \cdot \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\triangle BCD \Rightarrow BC = 2HD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ suy ra

$$V = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BC \cdot HD \cdot AH = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, có $BC = a$. Mặt bên SAC vuông góc với đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc 45° .

- Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AC.
- Tính thể tích khối chóp SABC.



Lời giải:

a) Kẻ $SH \perp BC$ vì $mp(SAC) \perp mp(ABC)$ nên $SH \perp mp(ABC)$.

Gọi I, J là hình chiếu của H trên AB và BC $\Rightarrow SI \perp AB, SJ \perp BC$, theo giả thiết $\widehat{SIH} = \widehat{SJH} = 45^\circ$

Ta có: $\triangle SHI = \triangle SHJ \Rightarrow HI = HJ$ nên BH là đường phân giác của $\triangle ABC$ từ đó suy ra H là trung điểm của AC.

$$b) HI = HJ = SH = \frac{a}{2} \Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{a^3}{12}$$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho hình chóp SABC có đáy ABC đều cạnh a, tam giác SBC cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC).

1) Chứng minh chân đường cao của chóp là trung điểm của BC.

2) Tính thể tích khối chóp SABC.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$$

Bài 2: Cho hình chóp SABC có đáy ABC vuông cân tại A với $AB = AC = a$ biết tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC), mặt phẳng (SAC)

hợp với (ABC) một góc 45° . Tính thể tích của SABC.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3}{12}$$

Bài 3: Cho hình chóp SABC có $\widehat{BAC} = 90^\circ$; $\widehat{ABC} = 30^\circ$; SBC là tam giác đều cạnh a

và $(SAB) \perp (ABC)$. Tính thể tích khối chóp SABC.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^2\sqrt{2}}{24}$$

Bài 4: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều; tam giác SBC có đường cao $SH = h$ và $(SBC) \perp (ABC)$. Cho biết SB hợp với mặt (ABC) một góc 30° . Tính

thể tích hình chóp SABC.

$$\text{Đs: } V = \frac{4h^3\sqrt{3}}{9}$$

Bài 5: Tứ diện ABCD có ABC và BCD là hai tam giác đều lần lượt nằm trong hai

mặt phẳng vuông góc với nhau biết $AD = a$. Tính thể tích tứ diện. Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$

Bài 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều có đường cao $SH = h$, nằm trong mặt phẳng vuông góc với ABCD,

1) Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AB.

2) Tính thể tích khối chóp SABCD.

$$\text{Đs: } V = \frac{4h^3}{9}$$

Bài 7: Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình chữ nhật, tam giác SAB đều cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABCD) biết (SAC) hợp với (ABCD) một góc

30° . Tính thể tích hình chóp SABCD.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

Bài 8: Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình chữ nhật có $AB = 2a$, $BC = 4a$,

$SAB \perp (ABCD)$, hai mặt bên (SBC) và (SAD) cùng hợp với đáy ABCD một góc 30°

. Tính thể tích hình chóp SABCD.

$$\text{Đs: } V = \frac{8a^3\sqrt{3}}{9}$$

Bài 9: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi với $AC = 2BD = 2a$ và tam giác SAD vuông cân tại S, nằm trong mặt phẳng vuông góc với ABCD. Tính thể tích

hình chóp SABCD.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3\sqrt{5}}{12}$$

Bài 10: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; $AD = CD = a$; $AB = 2a$ biết tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với

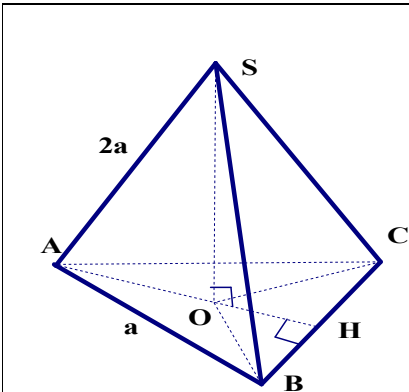
(ABCD). Tính thể tích khối chóp SABCD.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$

3) **Dạng 3:** **Khối chóp đều**



Ví dụ 1: Cho chóp tam giác đều SABC cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a.
 Chứng minh rằng chân đường cao kẻ từ S của hình chóp là tâm của tam giác đều ABC. Tính thể tích chóp đều SABC.



Lời giải:

Dựng $SO \perp (ABC)$ Ta có $SA = SB = SC$
 suy ra $OA = OB = OC$

Vậy O là tâm của tam giác đều ABC.
 Ta có tam giác ABC đều nên

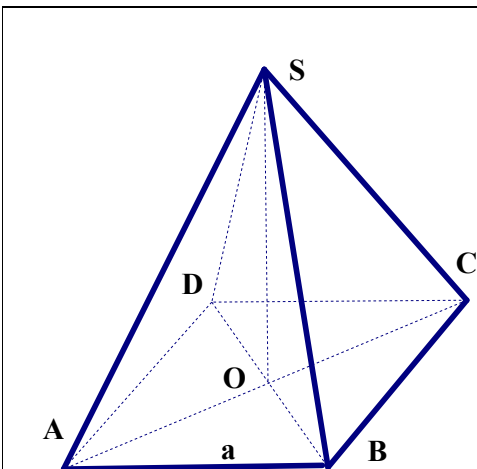
$$AO = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta SAO \Rightarrow SO^2 = SA^2 - OA^2 = \frac{11a^2}{3}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}. \text{ Vậy } V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$$

Ví dụ 2: Cho khối chóp tứ giác SABCD có tất cả các cạnh có độ dài bằng a.

- 1) Chứng minh rằng SABCD là chóp tứ giác đều.
- 2) Tính thể tích khối chóp SABCD.



Lời giải:

Dựng $SO \perp (ABCD)$

Ta có $SA = SB = SC = SD$ nên
 $OA = OB = OC = OD \Rightarrow ABCD$ là hình thoi có đường tròn ngoại tiếp nên ABCD là hình vuông.

Ta có $SA^2 + SB^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2$
 nên ΔASC vuông tại S $\Rightarrow OS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Ví dụ 3: Cho khối tứ diện đều ABCD cạnh bằng a, M là trung điểm DC.

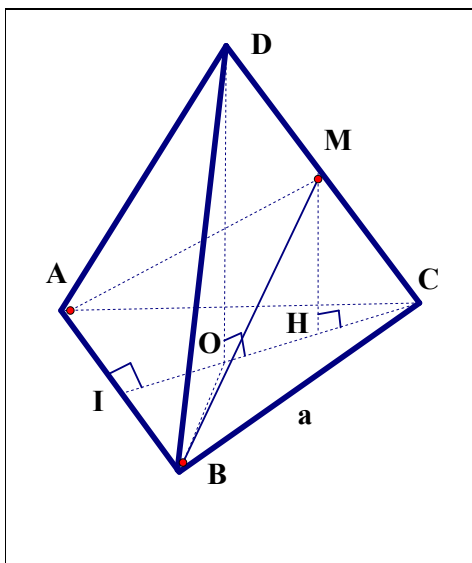
- a) Tính thể tích khối tứ diện đều ABCD.
- b) Tính khoảng cách từ M đến mp(ABC). Suy ra thể tích hình chóp MABC.

Lời giải:

a) Gọi O là tâm của $\Delta ABC \Rightarrow DO \perp (ABC)$

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot DO$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad OC = \frac{2}{3}CI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



$$\Delta DOC \text{ vuông có : } DO = \sqrt{DC^2 - OC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

b) Kẻ MH// DO, khoảng cách từ M đến mp(ABC) là MH

$$MH = \frac{1}{2} DO = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow V_{MABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot MH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho hình chóp đều SABCD có cạnh bên bằng a hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích hình chóp. Đs: $V = \frac{3a^3}{16}$

Bài 2: Cho hình chóp tam giác đều SABCD có cạnh bên a, góc ở đáy của mặt bên là 45° .

1) Tính độ dài chiều cao SH của chóp SABCD.

$$\text{Đs: } SH = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

2) Tính thể tích hình chóp SABCD.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3}{6}$$

Bài 3: Cho hình chóp tam giác đều SABCD có cạnh đáy a và mặt bên hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích hình chóp SABCD.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$$

Bài 4: Cho chóp tam giác đều có đường cao h hợp với một mặt bên một góc 30° . Tính thể tích hình chóp.

$$\text{Đs: } V = \frac{h^3\sqrt{3}}{3}$$

Bài 5: Cho hình chóp tam giác đều có đường cao h và mặt bên có góc ở đỉnh bằng 60° . Tính thể tích hình chóp.

$$\text{Đs: } V = \frac{h^3\sqrt{3}}{8}$$

Bài 6: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy a và $\widehat{ASB} = 60^\circ$.

1) Tính tổng diện tích các mặt bên của hình chóp đều.

$$\text{Đs: } S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

2) Tính thể tích hình chóp.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Bài 7: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có chiều cao h, góc ở đỉnh của mặt bên bằng 60° . Tính thể tích hình chóp.

$$\text{Đs: } V = \frac{2h^3}{3}$$

Bài 8: Cho hình chóp tứ giác đều có mặt bên hợp với đáy một góc 45° và khoảng cách từ chân đường cao của chóp đến mặt bên bằng a.

Tính thể tích hình chóp .

$$\text{Đs: } V = \frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$$

Bài 9: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng a hợp với đáy một góc 60° .

Tính thể tích hình chóp.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

Bài 10: Cho hình chóp SABCD có tất cả các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng SABCD là chóp tứ giác đều. Tính cạnh của hình chóp này khi thể tích của nó bằng $V = \frac{9a^3\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Đs: } AB = 3a$$

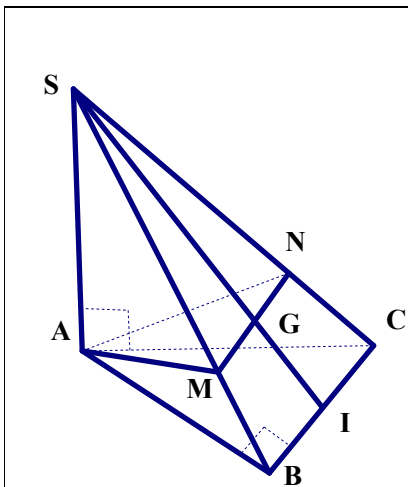
4) **Dạng 4:**

Khối chóp & phương pháp tỷ số thể tích

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với đáy ABC, $SA = a$

1) Tính thể tích của khối chóp S.ABC.

2) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, mặt phẳng (α) qua AG và song song với BC cắt SC, SB lần lượt tại M, N. Tính thể tích của khối chóp S.AMN



Lời giải:

$$\text{a) Ta có: } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA \text{ và } SA = a$$

$$+ \Delta ABC \text{ cân có } AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = a$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} a^2 \text{ Vậy: } V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot a = \frac{a^3}{6}$$

b) Gọi I là trung điểm BC.

$$G \text{ là trọng tâm, ta có: } \frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$$

$$\alpha // BC \Rightarrow MN // BC \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{4}{9}$$

$$\text{Vậy: } V_{SAMN} = \frac{4}{9} V_{SABC} = \frac{2a^3}{27}$$

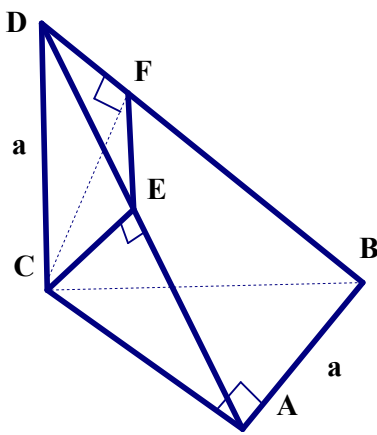
Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông cân ở A và $AB = a$. Trên đường thẳng qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm D sao cho $CD = a$. Mặt phẳng qua C vuông góc với BD, cắt BD tại F và cắt AD tại E.

a) Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

b) Chứng minh $CE \perp (ABD)$

c) Tính thể tích khối tứ diện CDEF.

?



Lời giải:

a) Tính V_{ABCD} : $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot CD = \frac{a^3}{6}$

b) Tacó:
 $AB \perp AC, AB \perp CD \Rightarrow AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp EC$
 Ta có: $DB \perp EC \Rightarrow EC \perp (ABD)$

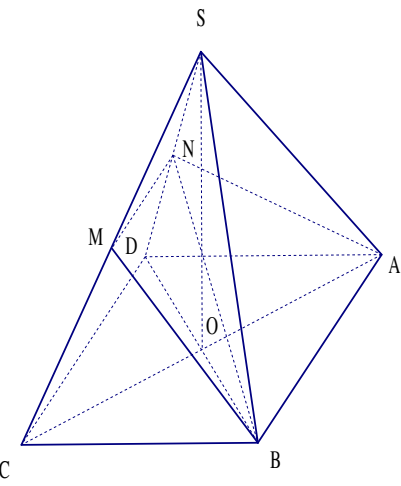
c) Tính V_{DCEF} : Ta có: $\frac{V_{DCEF}}{V_{DABC}} = \frac{DE}{DA} \cdot \frac{DF}{DB} (*)$

Mà $DE \cdot DA = DC^2$, chia cho DA^2
 $\Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{DC^2}{DA^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$

Tương tự: $\frac{DF}{DB} = \frac{DC^2}{DB^2} = \frac{a^2}{DC^2 + CB^2} = \frac{1}{3}$

Từ (*) $\Rightarrow \frac{V_{DCEF}}{V_{DABC}} = \frac{1}{6}$. Vậy $V_{DCEF} = \frac{1}{6} V_{ABCD} = \frac{a^3}{36}$

Ví dụ 3: Cho khối chóp tứ giác đều SABCD. Một mặt phẳng (α) qua A, B và trung điểm M của SC. Tính tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó.



Lời giải:

Kẻ $MN \parallel CD$ ($N \in SD$) thì hình thang ABMN là thiết diện của khối chóp khi cắt bởi mặt phẳng (ABM).

$+ \frac{V_{SAND}}{V_{SADB}} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{SANB} = \frac{1}{2} V_{SADB} = \frac{1}{4} V_{SABCD}$

$\frac{V_{SBMN}}{V_{SBCD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{SBMN} = \frac{1}{4} V_{SBCD} = \frac{1}{8} V_{SABCD}$

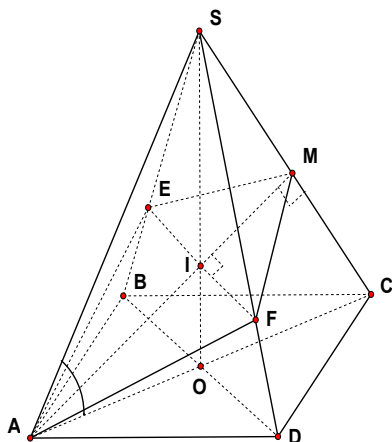
Mà $V_{SABMN} = V_{SANB} + V_{SBMN} = \frac{3}{8} V_{SABCD}$.

Suy ra $V_{ABMN.ABCD} = \frac{5}{8} V_{SABCD}$

Do đó: $\frac{V_{SABMN}}{V_{ABMN.ABCD}} = \frac{3}{5}$

Ví dụ 4: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy góc 60° . Gọi M là trung điểm SC. Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD, cắt SB tại E và cắt SD tại F.

- Hãy xác định mp(AEMF)
- Tính thể tích khối chóp S.ABCD
- Tính thể tích khối chóp S.AEMF



Lời giải:

a) Gọi $I = SO \cap AM$. Ta có (AEMF) $EF \parallel BD$
 $\Rightarrow EF \parallel BD$

$$\text{b) } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO \text{ với } S_{ABCD} = a^2$$

$$+ \Delta \text{SOA} \text{ có : } SO = AO \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Vậy: } V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$$

c) Phân chia chớp tứ giác ta có

$$V_{SAEMF} = V_{SAMF} + V_{SAME} = 2V_{SAMF}$$

$$V_{S.ABCD} = 2V_{SACD} = 2 V_{SABC}$$

Xét khối chóp S.AMF và S.ACD

Ta có : $\Rightarrow \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}$

ΔSAC có trọng tâm I, $EF \parallel BD$ nên:

$$\Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{SF}{SD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{V_{SAMF}}{V_{SACD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SF}{SD} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow V_{SAMF} = \frac{1}{3}V_{SACD} = \frac{1}{6}V_{SACD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$$

$$\Rightarrow V_{S.AEMF} = 2 \frac{a^3 \sqrt{6}}{36} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{18}$$

Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi B', D' là hình chiếu của A lần lượt lên SB, SD. Mặt phẳng (AB'D') cắt SC tại C'.

a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

b) Chứng minh $SC \perp (AB'D')$

c) Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$

Bài 7: Cho hình chóp SABCD có thể tích bằng 9m^3 , ABCD là hình bình hành, lấy M trên SA sao cho $2SA = 3SM$. Mặt phẳng (MBC) cắt SD tại N. Tính thể tích khối đa diện ABCDMN.

Đs: $V = 4\text{m}^3$

Bài 8: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a, chiều cao SA = h. Gọi N là trung điểm SC. Mặt phẳng chứa AN và song song với BD lần lượt cắt SB, SD tại M và P. Tính thể tích khối chóp SAMNP.

Đs: $V = \frac{a^2 h}{9}$

Bài 9: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành và I là trung điểm của SC. Mặt phẳng qua AI và song song với BD chia hình chóp thành 2 phần. Tính tỉ số thể tích 2 phần này.

Đs: $k = \frac{1}{2}$

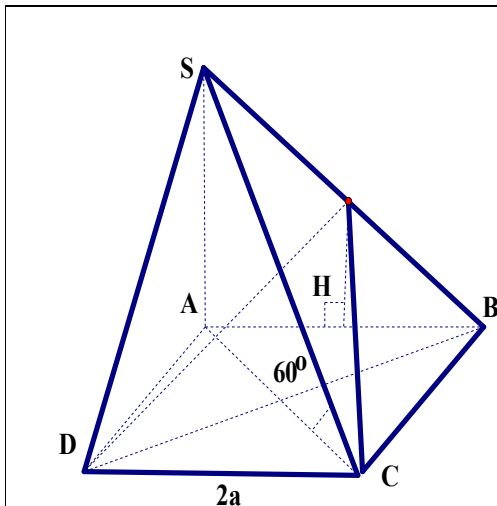
Bài 10: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành và lấy M trên SA sao cho $\frac{SM}{SA} = x$. Tìm x để mặt phẳng (MBC) chia hình chóp thành 2 phần có thể tích bằng nhau.

Đs: $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

5) Dạng 5: Ôn tập khối chóp và lăng trụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc đáy. Góc giữa SC và đáy bằng 60° và M là trung điểm của SB.

- 1) Tính thể tích của khối chóp S.ABCD.
- 2) Tính thể tích của khối chóp MBCD.



Lời giải:

a) Ta có $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA$

$+ S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$

$+ \Delta SAC$ có $SA = AC \tan C = 2a\sqrt{6}$

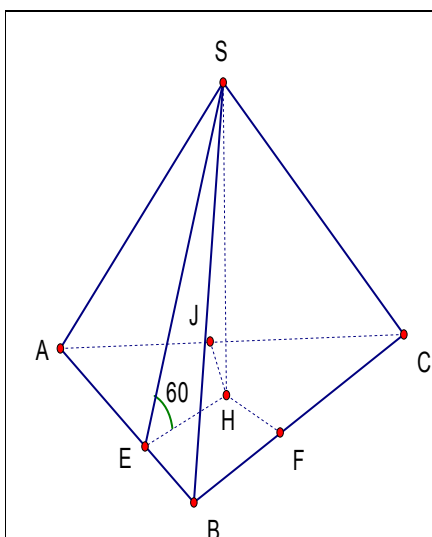
$\Rightarrow V = \frac{1}{3} 4a^2 \cdot 2a\sqrt{6} = \frac{8a^3 \sqrt{6}}{3}$

b) Kẻ $MH \parallel SA \Rightarrow MH \perp (DBC)$

Ta có: $MH = \frac{1}{2} SA$, $S_{BCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

$\Rightarrow V_{MBCD} = \frac{1}{4} V = \frac{2a^3 \sqrt{6}}{3}$

Ví dụ 2: Cho hình chóp tam giác S.ABC có AB = 5a, BC = 6a, CA = 7a. Các mặt bên SAB, SBC, SCA tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp.



Lời giải:

Hạ $SH \perp (ABC)$, kẻ $HE \perp AB$, $HF \perp BC$, $HJ \perp AC$
suy ra $SE \perp AB$, $SF \perp BC$, $SJ \perp AC$. Ta có

$$\widehat{SEH} = \widehat{SFH} = \widehat{SJH} = 60^\circ \Rightarrow$$

$\Delta SAH = \Delta SFH = \Delta SJH$ nên $HE = HF = HJ = r$
(r là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC)

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\text{với } p = \frac{a+b+c}{2} = 9a \text{ Nên } S_{ABC} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} a^2$$

$$\text{Mặt khác } S_{ABC} = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{2\sqrt{6} a}{3}$$

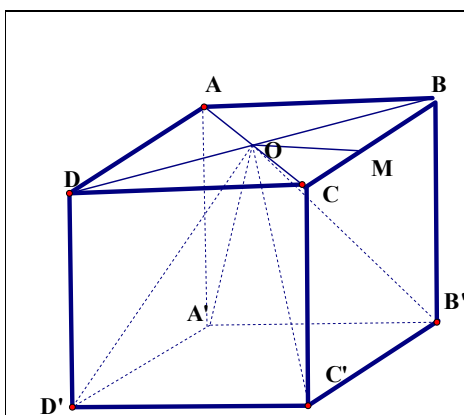
Tam giác vuông SHE:

$$SH = r \cdot \tan 60^\circ = \frac{2\sqrt{6} a}{3} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{2} a$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3} 6\sqrt{6} a^2 \cdot 2\sqrt{2} a = 8\sqrt{3} a^3.$$

Ví dụ 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$, $AA' = a$, O là giao điểm của AC và BD .

- Tính thể tích khối hộp chữ nhật, khối chóp $OA'B'C'D'$
- Tính thể tích khối $OBB'C'$.
- Tính độ dài đường cao đỉnh C' của tứ diện $OBB'C'$.



Lời giải:

a) Gọi thể tích khối hộp chữ nhật là V .

$$\text{Ta có : } V = AB \cdot AD \cdot AA' = a\sqrt{3} \cdot a^2 = a^3\sqrt{3}$$

$$\Delta ABD \text{ có : } DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$$

* Khối $OA'B'C'D'$ có đáy và đường cao

$$\text{giống khối hộp nên: } \Rightarrow V_{OA'B'C'D'} = \frac{1}{3} V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

b) M là trung điểm $BC \Rightarrow OM \perp (BB'C')$

$$\Rightarrow V_{OBB'C'} = \frac{1}{3} S_{BB'C'} \cdot OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

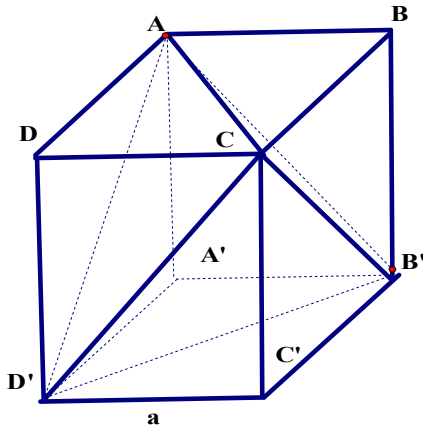
c) Gọi $C'H$ là đường cao đỉnh C' của tứ

$$\text{diện } OBB'C'. \text{ Ta có : } C'H = \frac{3V_{OBB'C'}}{S_{OBB'}}$$

$$\Delta ABD \text{ có : } DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$$

$$\Rightarrow S_{OBB'} = \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow C'H = 2a\sqrt{3}$$

Ví dụ 4: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a.
Tính thể tích khối tứ diện ACB'D'.



Lời giải:

Hình lập phương được chia thành: khối ACB'D' và bốn khối CB'D'C', BB'AC, D'ACD, AB'A'D'.

+Các khối CB'D'C', BB'AC, D'ACD, AB'A'D' có diện tích đáy và chiều cao bằng nhau nên có cùng thể tích.

Khối CB'D'C' có $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot a = \frac{1}{6}a^3$

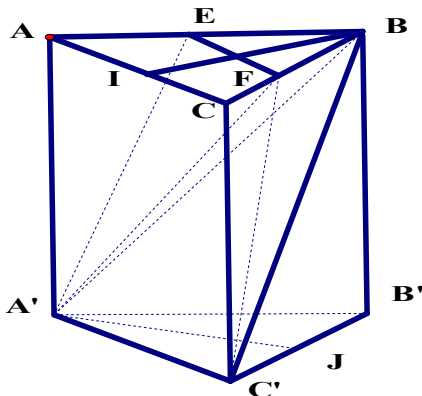
+Khối lập phương có thể tích: $V_2 = a^3$

$$\Rightarrow V_{ACB'D'} = a^3 - 4 \cdot \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3}a^3$$

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ đứng tam giác có các cạnh bằng a.

a) Tính thể tích khối tứ diện A'B'BC.

b) E là trung điểm cạnh AC, mp(A'B'E) cắt BC tại F. Tính thể tích khối CA'B'FE.



Lời giải:

a) Khối A'B'BC: Gọi I là trung điểm AB,

$$V_{A'B'BC} = \frac{1}{3}S_{A'B'B} \cdot CI = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

b) Khối CA'B'FE: phân ra hai khối CEFA' và CFA'B'.

+Khối A'CEFcó đáy là CEF, đường cao

$$A'A \text{ nên } V_{A'CEF} = \frac{1}{3}S_{CEF} \cdot A'A$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16} \Rightarrow V_{A'CEF} = \frac{a^3\sqrt{3}}{48}$$

+Gọi J là trung điểm B'C'. Ta có khối A'B'CF có đáy là CFB', đường cao JA'

	$\text{nên } V_{A'B'CF} = \frac{1}{3} S_{CFB'} \cdot A'J$ $S_{CFB'} = \frac{1}{2} S_{CBB'} = \frac{a^2}{4}$ $\Rightarrow V_{A'B'CF} = \frac{1}{3} \frac{a^2}{4} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ $+ \text{ Vậy: } V_{CA'B'FE} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$
--	--

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho lăng trụ đứng $ABCA_1B_1C_1$ có $\triangle ABC$ vuông. $AB = AC = a$; $AA_1 = a\sqrt{2}$. M là trung điểm AA_1 . Tính thể tích lăng trụ MA_1BC_1 Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Bài 2: Hình chóp $SABCD$ có $\triangle ABC$ vuông tại B , $SA \perp (ABC)$. $\widehat{ACB} = 60^\circ$, $BC = a$, $SA = a\sqrt{3}$, M là trung điểm SB . Tính thể tích $MABC$. Đs: $V_{MABC} = \frac{1}{4} a^3$

Bài 3: $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn $AB = 2$, $\widehat{ACB} = 90^\circ$. $\triangle SAC$ và $\triangle SBD$ là các tam giác đều có cạnh bằng $\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $SABCD$.
Đs: $V_{SABCD} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

Bài 4: Tính thể tích hình chóp tam giác đều $SABC$ trong các trường hợp sau:

a) Cạnh đáy bằng 1, góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Đs: $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$

b) $AB = 1$, $SA = 2$. Đs: $V = \frac{\sqrt{11}}{12}$

Bài 5: Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$ có độ dài cạnh bên $= 2a$, $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm BC .

Tính $V_{A'ABC}$ theo a ? Đs: $V = \frac{a^3}{2}$

Bài 6: Cho hình chóp $SABC$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $S_{ABCD} = \sqrt{3}$ và góc giữa 2 đường chéo bằng 60° , các cạnh bên nghiêng đều với đáy 1 góc 45° .

Tính V_{SABCD} . Đs: $V = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 7: Cho hình chóp $SABC$ có $SA = SB = SC = a$. $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông. Tính V_{SABC} . Đs: $V = \frac{a\sqrt{2}}{12}$

Bài 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Tính theo a thể tích khối chóp $S.BMDN$

Đs: $V_{S.BMDN} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Bài 9: Cho lăng trụ đứng tam giác đều $ABCA'B'C'$ có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a . M, N, E lần lượt là trung điểm của $BC, CC', C'A'$. Tính tỉ số thể tích hai phần lăng trụ do (MNE) tạo ra. Đs: $k = 1$

Bài 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD . Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện $CMNP$.

$$\text{Đs: } V_{M.CNP} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{96}$$

PHẦN I. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP – KHỐI LĂNG TRỤ

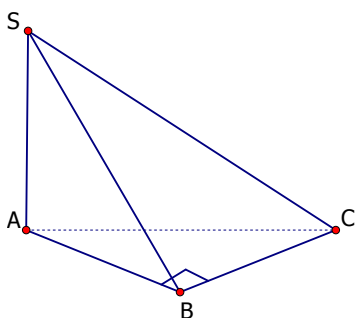
Dạng I

Bài Toán 1.1:

Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B , $AB = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

Giải

- Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:
 - Vẽ tam giác đáy, vẽ đường cao $SA \perp (ABC)$ và vẽ thẳng đứng
 - Sử dụng định lý pitago trong tam giác vuông
- Lời giải:



$$\text{Ta có : } AB = a\sqrt{2},$$

$$AC = a\sqrt{3}$$

$$SB = a\sqrt{3}.$$

$$* \Delta ABC \text{ vuông tại } B \text{ nên } BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a = \frac{a^2 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$* \Delta SAB \text{ vuông tại } A \text{ có } SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$$

* Thể tích khối chóp $S.ABC$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{6}$$

Bài Toán 1.2:

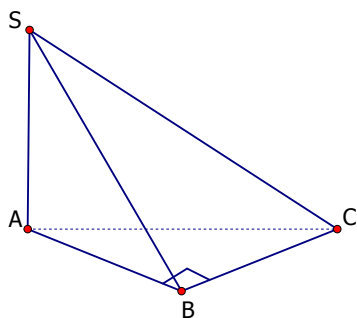
Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

Giải

- Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:
 - Vẽ tam giác đáy, vẽ đường cao $SA \perp (ABC)$ và vẽ thẳng đứng
 - Tam giác ABC vuông, cân tại B nên $BA = BC$ và sử dụng định lý pitago trong tam giác vuông
- Lời giải:

$$\text{Ta có : } AC = a\sqrt{2},$$

$$SB = a\sqrt{3}.$$



* ΔABC vuông, cân tại B nên

$$BA = BC = \sqrt{\frac{AC^2}{2}} = a$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{2}$$

* ΔSAB vuông tại A có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$

* Thể tích khối chóp S.ABC

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}$$

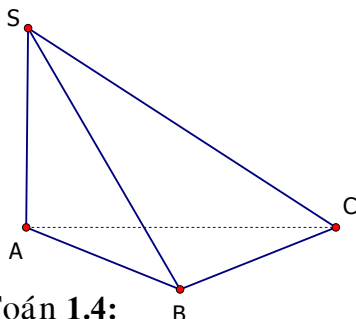
Bài Toán 1.3:

Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC đều cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = a\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp S.ABC

Giải

- Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:
 - Vẽ tam giác đáy, vẽ đường cao $SA \perp (ABC)$ và vẽ thẳng đứng
 - Tam giác ABC đều có ba góc bằng 60° và sử dụng định lý pitago trong tam giác vuông SAB

▪ Lời giải:



* ΔABC đều cạnh $2a$ nên

$$AB = AC = BC = 2a$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a^2 \cdot \sqrt{3}$$

* ΔSAB vuông tại A có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$

* Thể tích khối chóp S.ABC

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} \cdot a = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

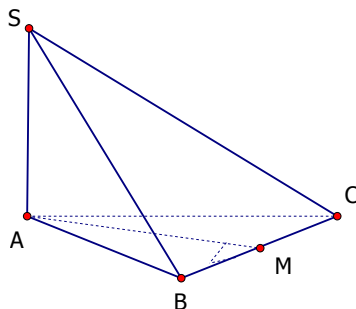
Bài Toán 1.4:

Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC cân tại A, $BC = 2a\sqrt{3}$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Tính thể tích khối chóp S.ABC

Giải

- Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:
 - Vẽ tam giác đáy, vẽ đường cao $SA \perp (ABC)$ và vẽ thẳng đứng
 - Tam giác ABC cân tại A và $\hat{A} = 120^\circ$

▪ Lời giải:



* ΔABC cân tại A, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $BC = 2a\sqrt{3}$

$$AB = AC = BC = 2a$$

Xét ΔAMB vuông tại M có $BM = a\sqrt{3}$, $\hat{A} = 60^\circ$

$$\Rightarrow AM = \frac{BM}{\tan 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = a$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a\sqrt{3} = a^2 \cdot \sqrt{3}$$

* $SA = a$

* Thể tích khối chóp S.ABC

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} \cdot a = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

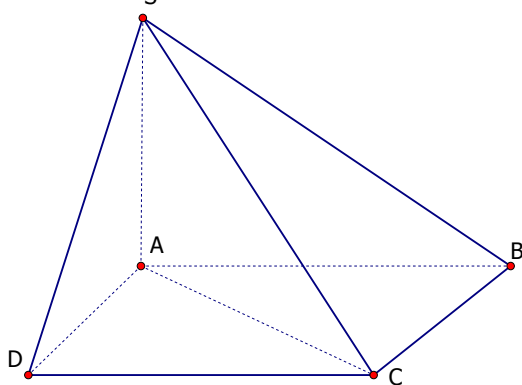
Bài Toán 1.5:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SC = a\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD

Giải

- Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:
 - Vẽ đáy là hình vuông (vẽ như hình bình hành), cao $SA \perp (ABCD)$ và vẽ thẳng đứng
 - ABCD là hình vuông ; sử dụng định lý pitago trong tam giác vuông

- Lời giải:



Ta có : ABCD là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$

$$SC = a\sqrt{5}.$$

* Diện tích ABCD

$$\Rightarrow S_{ABCD} = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2$$

* Ta có : $AC = AB \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2a$

ΔSAC vuông tại A

$$\Rightarrow SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a$$

* Thể tích khối chóp S.ABCD

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot 2a^2 \cdot a = \frac{2a^3}{3}$$

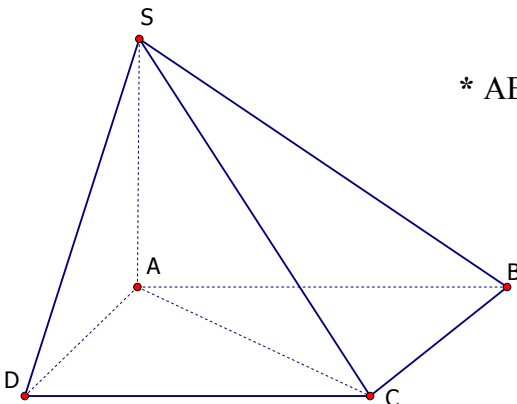
Bài Toán 1.6:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD

Giải

- Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:
 - Vẽ đáy là hình vuông (vẽ như hình bình hành), cao $SA \perp (ABCD)$ và vẽ thẳng đứng
 - Biết AC và suy ra cạnh của hình vuông (Đường chéo hình vuông bằng cạnh nhân với $\sqrt{2}$)

- Lời giải:



Ta có : $SA = AC = a\sqrt{2}$

* ABCD là hình vuông

$$AC = AB \cdot \sqrt{2} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a$$

Diện tích ABCD : $S_{ABCD} = a^2$

* $SA = a\sqrt{2}$

* Thể tích khối chóp S.ABCD

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

Bài Toán 1.7:

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, cạnh bên bằng $2a$. Tính thể tích khối chóp S.ABC

Giải

- Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:
 - Hình chóp tam giác đều có đáy là tam giác đều tâm O
 - + Gọi M là trung điểm BC
 - + O là trọng tâm của tam ABC
 - + AM là đường cao trong ΔABC
 - Đường cao của hình chóp là SO ($SO \perp (ABC)$)

▪ Lời giải:

* S.ABC là hình chóp tam giác đều

Gọi M là trung điểm BC

ΔABC đều cạnh $a\sqrt{3}$, tâm O

$SO \perp (ABC)$

$SA=SB=SC=2a$

* ΔABC đều cạnh $a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow AM = a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$$

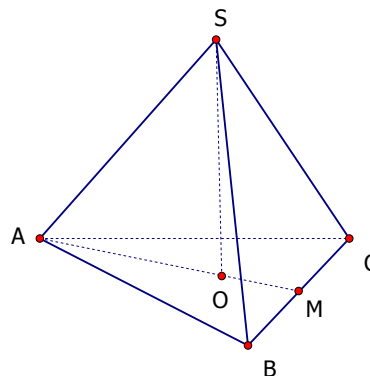
$$\Rightarrow AO = \frac{2}{3} \cdot AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a}{2} = a$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

* ΔSAO vuông tại A có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a\sqrt{3}$

* Thể tích khối chóp S.ABC

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

**Bài Toán 1.8:**

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD

Giải

- Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:
 - Hình chóp tứ giác đều có
 - + đa giác đáy là hình vuông ABCD tâm O
 - + $SO \perp (ABCD)$
 - + tất cả các cạnh bên bằng nhau
 - Đường cao của hình chóp là SO ($SO \perp (ABCD)$)

▪ Lời giải:

* S.ABCD là hình chóp tứ giác đều

ABCD là hình vuông cạnh $2a$, tâm O

$SO \perp (ABCD)$ $SA=SB=SC=SD= a\sqrt{3}$

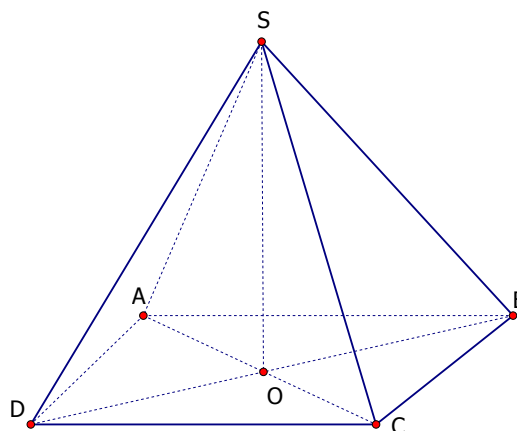
* Diện tích hình vuông ABCD

$$\Rightarrow AC = 2a \cdot \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AO = \frac{AC}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$$

* ΔSAO vuông tại O có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a$



* Thể tích khối chóp S.ABCD

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot a = \frac{4a^3}{3}$$

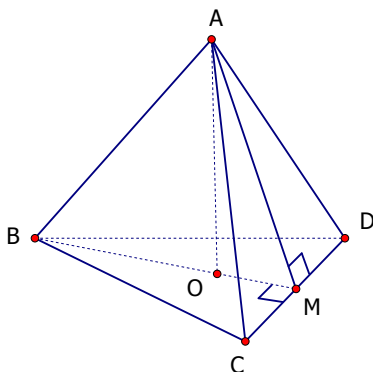
Bài Toán 1.9: Tính thể tích của khối tứ diện đều cạnh a

Giải

▪ Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:

- Tứ diện đều ABCD có các tính chất
 - + tất cả các cạnh đều bằng nhau
 - + tất cả các mặt là các tam giác đều
 - + gọi O là trọng tâm của tam giác đáy
- Đường cao của hình chóp là AO (AO ⊥ (BCD))

▪ Lời giải:



* ABCD là tứ diện đều cạnh a

Gọi M là trung điểm CD

Ta có : AB=AC=AD = AC=CD=BD = a

Δ BCD đều cạnh a, tâm O

⇒ AO ⊥ (BCD)

* Δ BCD đều cạnh a

$$\Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow BO = \frac{2}{3} \cdot BM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta BCD} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

* Δ AOB vuông tại O có

$$AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{(a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

* Thể tích khối chóp S.ABC

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{BCD} \cdot AO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

Bài Toán 1.10:

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB=a, AC=a√3, cạnh A'B = 2a. Tính thể tích khối lăng trụ

Giải

* Tam giác ABC vuông tại B

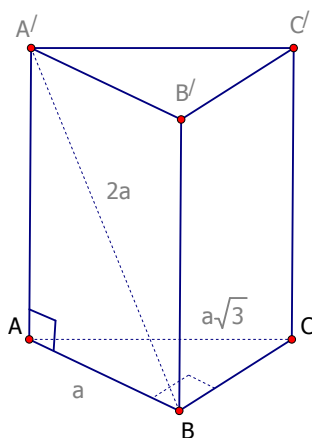
$$\Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$$

* Tam giác A'AB vuông tại A

$$\Rightarrow A'A = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$$

$$* V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'A = \frac{a^3 \sqrt{6}}{2}$$

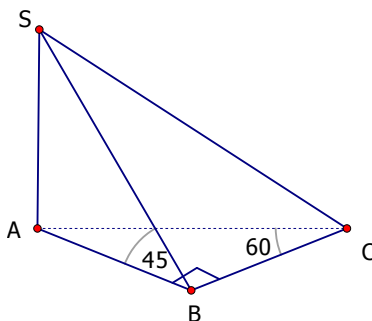


Dạng 2.**THỂ TÍCH KHỐI CHÓP- KHỐI LĂNG TRỤ****LIÊN QUAN ĐẾN GÓC****Bài Toán 2.1:**

Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại B, $AB = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SB tạo với mặt đáy một góc bằng 45° . Tính thể tích khối chóp S.ABC

Giải

- Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:
 - Vẽ tam giác đáy, vẽ đường cao $SA \perp (ABC)$ và vẽ thẳng đứng
 - Xác định góc giữa SB và (ABC) là góc giữa SB với hình chiếu của nó lên (ABC)
- Lời giải:



* Ta có : $AB = a$,

$$AB = hc_{SB}^{(ABC)}$$

$$\Rightarrow \widehat{(SB, (ABC))} = \widehat{(SB, AB)} = \widehat{SBA} = 45^\circ$$

* ΔABC vuông tại B có $AB = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$

$$\Rightarrow BC = \frac{AB}{\tan 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{6}$$

* ΔSAB vuông tại A có $AB = a$, $\widehat{B} = 45^\circ$

$$\Rightarrow SA = AB \cdot \tan 45^\circ = a$$

* Thể tích khối chóp S.ABC

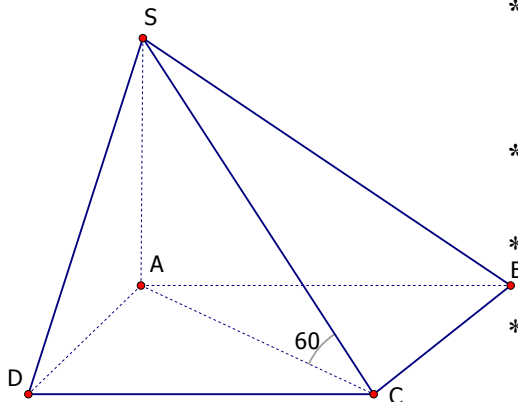
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{6} \cdot a = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{18}$$

Bài Toán 2.2:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SC tạo với mặt đáy một góc bằng 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABCD

Giải

- Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:
 - Vẽ tam giác đáy, vẽ đường cao $SA \perp (ABCD)$ và vẽ thẳng đứng
 - Xác định góc giữa SC và (ABCD) là góc giữa SC với hình chiếu AC của SC lên (ABCD)
- Lời giải:



* Ta có : ABCD là hình vuông cạnh a ,

$$AC = hc_{SC}^{(ABCD)}$$

$$\Rightarrow \widehat{(SC, (ABCD))} = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA} = 60^\circ$$

* Diện tích hình vuông

$$\Rightarrow S_{ABCD} = a^2$$

* ΔSAC vuông tại A có $AC = a\sqrt{2}$, $\widehat{C} = 60^\circ$

$$\Rightarrow SA = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$$

* Thể tích khối chóp S.ABCD

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{6} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{6}}{3}$$

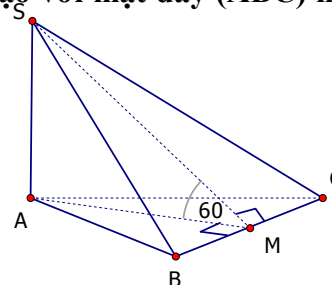
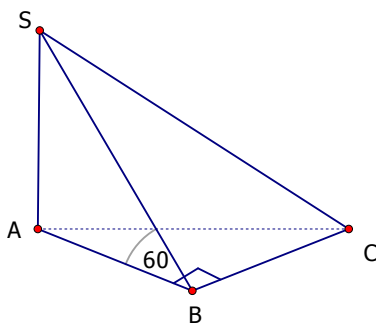
Bài Toán 2.3:

Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy; mặt bên (SBC) tạo với mặt đáy (ABC) một góc bằng 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABC

Giải▪ **Sai lầm của học sinh:**

- Gọi M là trung điểm BC
- Ta có $AM \perp BC$
 $SM \perp BC$

$$\Rightarrow ((SBC), (ABC)) = (\widehat{SM, AM}) = \widehat{SMA} = 60^\circ$$

**(Hình vẽ sai)**▪ **Lời giải đúng:*** Ta có : $AB = a\sqrt{3}$,

$$(SBC) \cap (ABC) = BC$$

 $AB \perp BC$ (vì ΔABC vuông tại B)

 $SB \perp BC$ (vì $AB = hc_{(ABC)} SB$)

$$\Rightarrow ((SBC), (ABC)) = (\widehat{SB, AB}) = \widehat{SBA} = 60^\circ$$

* ΔABC vuông tại B có $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot a = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

* ΔSAB vuông tại A có $AB = a$, $\widehat{B} = 60^\circ$

$$\Rightarrow SA = AB \cdot \tan 60^\circ = 3a$$

* Thể tích khối chóp S.ABC

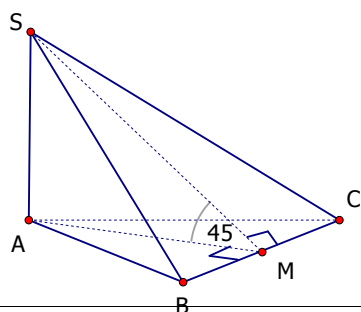
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 3a = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Bài Toán 2.4:

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy; mặt bên (SBC) tạo với mặt đáy (ABC) một góc bằng 45° . Tính thể tích khối chóp S.ABC

Giải▪ **Sai lầm của học sinh:**

$$\Rightarrow ((SBC), (ABC)) = \widehat{SBA} = 45^\circ$$

▪ **Lời giải đúng:*** Ta có : $AB = a\sqrt{3}$,

$$(SBC) \cap (ABC) = BC$$

Gọi M là trung điểm BC

 $AM \perp BC$ (vì ΔABC cân tại A)

 $SM \perp BC$ (vì $AM = hc_{(ABC)} SM$)

$$\Rightarrow ((SBC), (ABC)) = (\widehat{SM, AM}) = \widehat{SMA} = 45^\circ$$

* ΔABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow AB = BC = a \text{ và } AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{2}$$

$$* \Delta SAM \text{ vuông tại } A \text{ có } AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \widehat{M} = 45^\circ$$

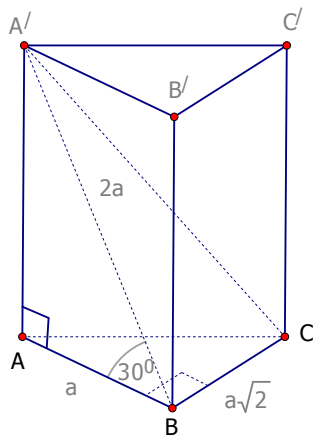
$$\Rightarrow SA = AB \cdot \tan 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

* Thể tích khối chóp S.ABC

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$$

Bài Toán 2.5:

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB=a$, $BC = a\sqrt{2}$, mặt bên $(A'BC)$ hợp với mặt đáy (ABC) một góc 30° . Tính thể tích khối lăng trụ.



Giải

* Ta có $A'A \perp (ABC)$

$$(A'BC) \cap (ABC) = BC$$

$$AB \perp BC$$

Mà $AB = hc_{(ABC)} A'B$ nên $A'B \perp BC$

$$\Rightarrow \widehat{(A'BC), (ABC)} = \widehat{A'BA} = 30^\circ$$

* Tam giác ABC vuông tại B

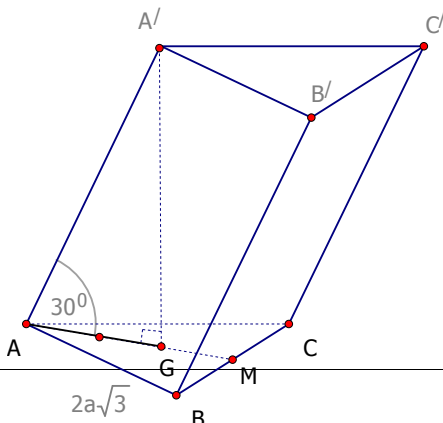
$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$$

$$* \text{ Tam giác } A'AB \text{ vuông tại } A \Rightarrow A'A = AB \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$* V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'A = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$$

Bài Toán 2.6:

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC , cạnh $A'A$ hợp với mặt đáy (ABC) một góc 30° . Tính thể tích khối lăng trụ.



Giải

* Gọi M là trung điểm BC

G là trọng tâm của tam giác ABC

Ta có $A'G \perp (ABC)$

$$GA = hc_{(ABC)} A'A$$

$$\Rightarrow \widehat{A'A, (ABC)} = \widehat{A'AG} = 30^\circ$$

$$* \text{ Tam giác } ABC \text{ đều cạnh } 2a\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABC} = \left(2a\sqrt{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 3a^2\sqrt{3}$$

$$* \text{ Tam giác } A'AG \text{ vuông tại } G \text{ có } \hat{A} = 30^\circ, AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2a$$

$$\Rightarrow A'G = AG \cdot \tan 30^\circ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}. \text{ Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'G = 6a^3$$

Dạng 3.**TỶ SỐ THỂ TÍCH**

- Việc tính thể tích của một khối chóp thường học sinh giải bị nhiều sai sót, Tuy nhiên trong các đề thi lại yêu cầu học sinh tính thể tích của một khối chóp “nhỏ” của khối chóp đã cho. Khi đó học sinh có thể thực hiện các cách sau:

+ Cách 1:

- Xác định đa giác đáy
- Xác định đường cao (phải chứng minh đường cao vuông góc với mặt phẳng đáy)
- Tính thể tích khối chóp theo công thức

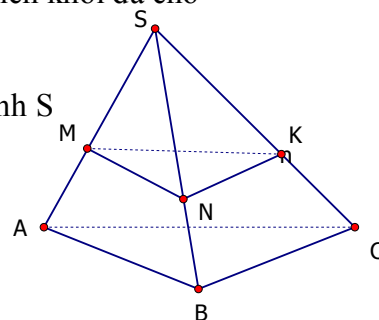
+ Cách 2

- Xác định đa giác đáy
- Tính các tỷ số độ dài của đường cao (nếu cùng đa giác đáy) hoặc diện tích đáy (nếu cùng đường cao) của khối chóp “nhỏ” và khối chóp đã cho và kết luận thể tích khối cần tìm bằng k lần thể tích khối đã cho

+ Cách 3: dùng tỷ số thể tích

Hai khối chóp S.MNK và S.ABC có chung đỉnh S và góc ở đỉnh S

$$\text{Ta có : } \frac{V_{S.MNK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SK}{SC}$$

**Bài Toán 3.1:**

Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC đều cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Tính thể tích khối chóp S.AMN

Giải

- Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:
 - Hướng dẫn học sinh tính thể tích một khối chóp “nhỏ” dựa trên dữ kiện liên quan đến khối chóp đã cho
- Lời giải:

Cách 1: (dùng công thức thể tích $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$)

S

* Khối chóp S.AMN có

- Đáy là tam giác AMN

- Đường cao là SA

* ΔAMN có $\hat{A} = 60^\circ$, $AM = AN = a$

$$\Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

* $SA = a\sqrt{3}$

* Thể tích khối chóp S.ABC

$$V_{S.AMN} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta AMN} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{4}$$

Cách 2 : (Dùng công thức tỷ số thể tích)

Khối chóp S.AMN và S.ABC có chung đỉnh A và góc ở đỉnh A

Do đó theo công thức tỷ số thể tích , ta có

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{AS}{AS} \cdot \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow V_{S.AMN} = V_{S.AMN} = \frac{1}{4} \cdot V_{S.ABC} = \frac{V_{S.ABC}}{4}$$

$$\text{Ta có : } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{4a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = a^3$$

$$\text{Vậy } V_{S.AMN} = \frac{V_{S.ABC}}{4} = \frac{a^3}{4}$$

▪ Nhận xét:

- Học sinh thường lúng túng khi gặp thể tích của khối chóp “nhỏ” hơn khối chóp đã cho và khi đó xác định đa giác đáy và đường cao thường bị sai.
- Trong một số bài toán thì việc dùng “tỷ số thể tích” có nhiều thuận lợi hơn.

Bài Toán 3.2:

Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC đều cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SC. Tính thể tích khối chóp S.AMN và A.BCNM

Giải

▪ Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:

- Hướng dẫn học sinh tính thể tích một khối chóp “nhỏ” dựa trên dữ kiện liên quan đến khối chóp đã cho

▪ Lời giải:

(Dùng công thức tỷ số thể tích)

Khối chóp S.AMN và S.ABC có chung đỉnh S và góc ở đỉnh S

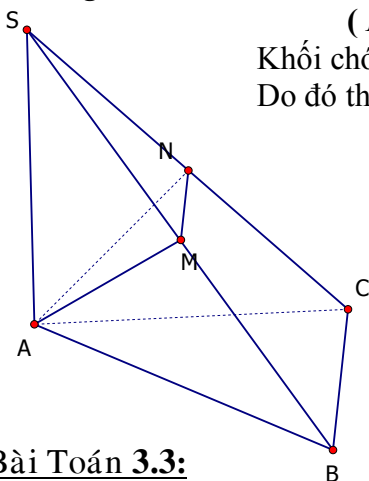
Do đó theo công thức tỷ số thể tích , ta có

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{V_{S.ABC}}{4} = \frac{\frac{1}{3} \cdot a^2 \sqrt{3} \cdot a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{4}$$

$$\Rightarrow V_{A.BCNM} = \frac{3}{4} V_{S.ABC} = \frac{3a^3}{4}$$

Bài Toán 3.3:



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Gọi I là trung điểm SC . Tính thể tích khối chóp $I.ABCD$

Giải

- *Giáo viên phân tích cho học sinh hiểu đề bài và hướng dẫn học sinh vẽ hình:*
 - Hướng dẫn học sinh tính thể tích một khối chóp “nhỏ” dựa trên dữ kiện liên quan đến khối chóp đã cho

▪ *Lời giải:*

Gọi O là giao điểm AC và BD

Ta có : $IO \parallel SA$ và $SA \perp (ABCD)$

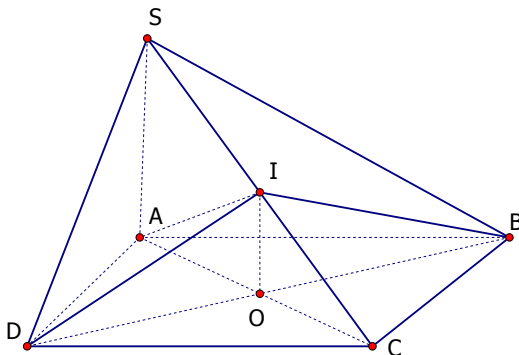
$\Rightarrow IO \perp (ABCD)$

$$\Rightarrow V_{I.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot IO$$

Mà : $S_{ABCD} = a^2$

$$IO = \frac{SA}{2} = a$$

$$\text{Vậy } V_{I.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a = \frac{a^3}{3}$$



Dạng 4.

DIỆN TÍCH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI CHÓP

THỂ TÍCH KHỐI CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI CHÓP

Trong chương trình toán phổ thông, yêu cầu xác định tâm, bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và tính diện tích của mặt cầu, thể tích của khối cầu đó.

- Xác định tâm I và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp
- Công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

$$S_{(s)} = 4\pi R^2 \quad V_{(s)} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Bài Toán 4.1:

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên tạo với đáy một góc bằng 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và thể tích của khối cầu ngoại tiếp khối chóp

Giải

- * $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều
 $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm O
 $SO \perp (ABCD)$

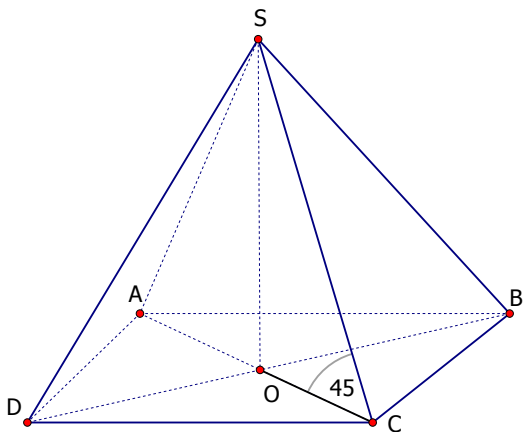
$$OC = hc \text{ } SC_{(ABCD)}$$

$$\Rightarrow (\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, OC}) = \widehat{SCO} = 45^\circ$$

- * Diện tích hình vuông $ABCD$

$$\Rightarrow AC = 2a \cdot \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow OC = AO = \frac{AC}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$$



$$\Rightarrow S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$$

* ΔSOC vuông tại O có $OC = a\sqrt{2}$, $\widehat{SCO} = 45^\circ$

$$\Rightarrow SO = OC = a\sqrt{2}$$

* Thể tích khối chóp S.ABCD

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$$

* Thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp

Ta có $OA=OB=OC=OD=OS = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ mặt cầu (S) ngoại tiếp khối chóp S.ABCD có tâm O và bán kính $R = a\sqrt{2}$

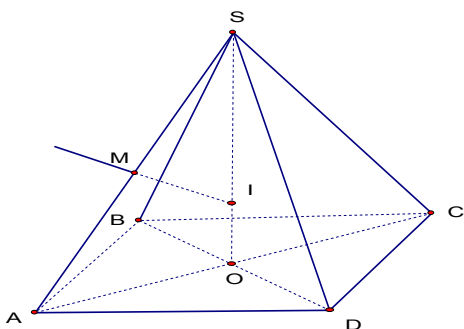
$$\text{Vậy } V_{(s)} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi(a\sqrt{2})^3}{3} = \frac{8\pi a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

Bài Toán 4.2:

Cho khối chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên 2a.

- 1) Tính thể tích của khối chóp.
- 2) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp trên.
- 3) Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp trên.

Giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có : $SO \perp (ABCD)$

$$V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot dt(ABCD)$$

$$dt(ABCD) = a^2$$

$$SO^2 = SC^2 - \frac{2a^2}{4} = 4a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{7a^2}{2}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{14}}{2}$$

$$\text{Vậy : } V = \frac{a^3\sqrt{14}}{6}$$

0,25

0,25

0,25

0,25

Dựng trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD

$\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Dựng trung trực của SA

$\Rightarrow d \perp SA$ tại trung điểm M

Xét (SAO) có d cắt SO tại I, ta có :

$$SI = IA$$

$$IA = IB = IC = ID$$

$\Rightarrow IS = IA = IB = IC = ID$

0,25

0,25

$\Rightarrow$ Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD có tâm là I và bán kính $r = SI$. $\Delta SIM \sim \Delta SAO \Rightarrow \frac{SI}{SA} = \frac{SM}{SO} \Rightarrow SI = \frac{SM.SA}{SO}$ $\Rightarrow SI = \frac{2a\sqrt{14}}{7}$. Vậy: $r = SI = \frac{2a\sqrt{14}}{7}$	0,25
$S = 4\pi r^2 = \frac{224\pi.a^2}{49}$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{448\pi a^3\sqrt{14}}{1029}$	0,25

Bài Tập Về Thể Tích Khối Đa Diện

Bài 1.1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính thể tích khối chóp $S.BCD$ theo a .

Bài 1.2 Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy là a; góc giữa cạnh bên và đáy là 60° . Tính thể tích khối chóp theo a ?

Bài 1.3 Cho khối chóp tam giác đều S.ABC có $AB = a$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp theo a.

Bài 1.4 Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, các cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Bài 1.5 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$; $SA \perp (ABCD)$. Cạnh bên SB bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Bài 1.6 Cho hình chóp S.ABC có ABC vuông cân tại B, $AC = 2a$, $SA \perp (ABC)$, góc giữa SB và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABC.

Bài 1.7 Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$, $AC = 2a$, góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABC

Bài 1.8 Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, $AB = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), cạnh SB tạo với đáy một góc 30° . Gọi M là trung điểm SB. Tính thể tích khối chóp M.ABC

Bài 1.9 Cho khối chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $BC = 2a$, biết $SA \perp (ABC)$ và mặt (SBC) hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp SABC.

Bài 1.10 Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Tính tỷ số thể tích của hai khối chóp $SMNK$ và $SABC$.

Bài 1.11 Cho hình chóp S.ABC có $SB = a\sqrt{2}$, $AB=AC = a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$, Hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABC). Tính thể tích khối chóp S.ABC.

Bài 1.12 Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Mặt bên (SBC) hợp với mặt đáy (ABC) một góc 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABC

Bài 1.13 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = b$. Cắt khối chóp bằng mặt phẳng (SBD) ta được hai khối chóp đỉnh S.

- Kể tên và so sánh thể tích của hai khối chóp đó.
- Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình chóp S.ABCD.
- Tính thể tích của hai khối chóp S.ABC và S.ABCD.

Bài 1.14 Cho khối chóp tứ giác SABCD có tất cả các cạnh bằng a .

- Chứng minh rằng SABCD là khối chóp tứ giác đều .
- Tính thể tích của khối chóp SABCD .
- Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp SABCD .

Bài 1.15 Cho hình chóp S.ABC , có đáy ABC là tam giác đều cạnh $3a$, tâm O. Các cạnh bên $SA = SB = SC$ và cạnh bên SA tạo với mặt đáy một góc 45° .

- Tính thể tích của khối chóp SABC
- Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC

Bài 1.16 Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều tâm O, cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$.

- Tính thể tích của khối chóp S.ABC theo a.
- Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC

Bài 1.17 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O, $SA = SB = SC = SD$. Biết $AB = 3a$, $BC = 4a$ và $\widehat{SAO} = 45^\circ$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Bài 1.18 Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) và $SA = a\sqrt{2}$.

- Tính thể tích của khối chóp S.ABC
- Tính diện tích và thể tích của mặt cầu và khối cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABC

Bài 1.19 Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $A'A = A'B = A'C$, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, cạnh $A'A$ tạo với mặt đáy góc 30° . Tính thể tích khối lăng trụ.

Bài 1.20 Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Tính diện tích mặt cầu và Tính thể tích khối cầu tương ứng.

Bài 1.21 Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh a, cạnh bên hợp đáy góc 60° . Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Tính diện tích mặt cầu và Tính thể tích khối cầu tương ứng.

Bài 1.22 Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh $AA' = a$. Gọi I là trung điểm của CC' .

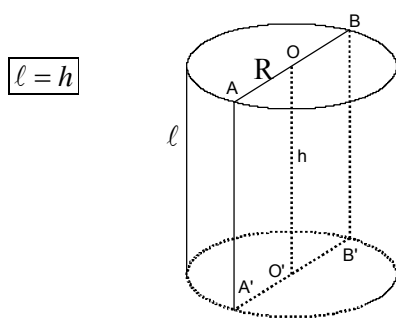
- Chứng minh rằng Tam giác $AB'I$ vuông tại A.
- Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Bài 1.23 Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC vuông tại B; $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính thể tích khối chóp S.AMB, và khoảng cách từ S đến mặt phẳng (AMB).

Phần II.

MẶT TRÒN XOAY

HÌNH TRỤ



* Diện tích xung quanh

$$S_{xq} = 2\pi Rl$$

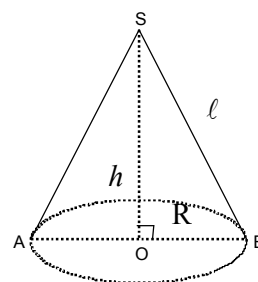
* Diện tích toàn phần

$$S_{tp} = 2\pi Rl + 2\pi R^2$$

* Thể Tích Khối trụ

$$V_{(T)} = \pi R^2 h$$

HÌNH NÓN



* Diện tích xung quanh

$$S_{xq} = \pi Rl$$

* Diện tích toàn phần

$$S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2$$

* Thể Tích Khối trụ

$$V_{(N)} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

Ví dụ 2.1:

Cho hình trụ có bán kính $R = a$, mặt phẳng qua trục và cắt hình trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $6a^2$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ.

Giải

* Mặt phẳng qua trục và cắt hình trụ theo một hình chữ nhật

$$\Rightarrow S = l \cdot 2R = 6a^2 \quad \Rightarrow l = \frac{6a^2}{2R} = 3a$$

* Diện tích xung quanh : $S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi \cdot a \cdot 3a = 6\pi a^2$ * Thể tích khối trụ : $V_{(T)} = \pi R^2 h = \pi \cdot a^2 \cdot 3a = 3\pi a^3$

Ví dụ 2.2:

Cho hình nón, mặt phẳng qua trục và cắt hình nón tạo ra thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích của khối nón.

Giải

* Mặt phẳng qua trục và cắt hình nón tạo ra tam giác đều cạnh $2a$

$$\Rightarrow l = 2R = 2a \quad \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

* Diện tích xung quanh : $S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot a \cdot 2a = 2\pi a^2$ * Thể tích khối trụ : $V_{(T)} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot a^2 \cdot a\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 2.3: Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có $AB = a$, gọi O là tâm của đáy, $\widehat{SAO} = 60^\circ$.

1. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

2. Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S , đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$

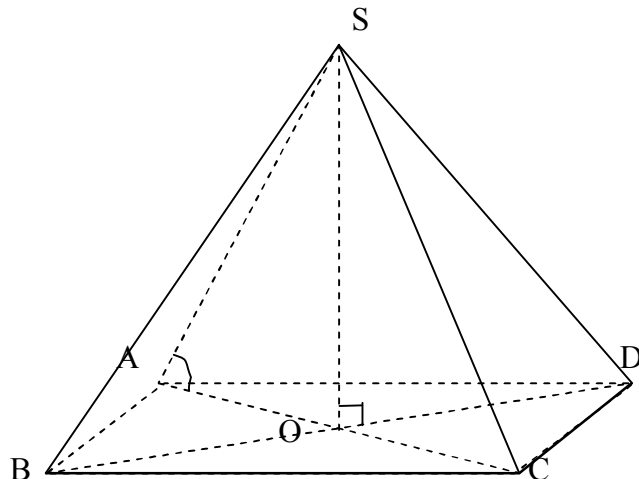
Giải

1). Vì $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$

Ta có : $S_{ABCD} = a^2$;

$$\Delta SOA \text{ vuông tại } O \text{ có : } SO = AO \tan \widehat{SAO} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} a^2 \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6} \quad (\text{đvtt})$$



2. Gọi l, r lần lượt là đường sinh, bán kính đáy của hình nón .

$$\text{Ta có : } r = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2} ;$$

$$l = SA = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{2} + \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{xq} = \pi r l = \pi \frac{a\sqrt{2}}{2} a\sqrt{2} = \pi a^2 \quad (\text{đvdt})$$

Ví dụ 2.4: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , góc SAC bằng 45° .

a) Tính thể tích khối chóp .

b) Tính diện tích xung quanh của mặt nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Giải

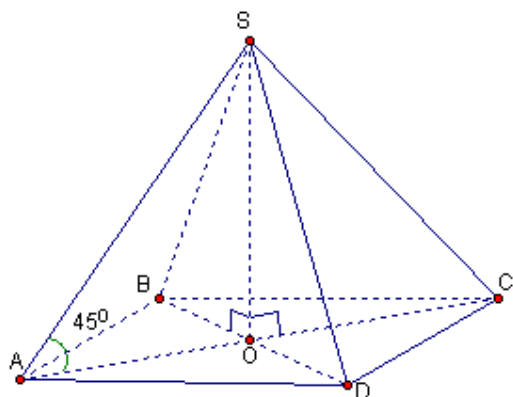
a) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h, \quad B = a^2; \quad h = SO = OA \cdot \tan 45^\circ = a \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Rightarrow V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} \quad (\text{đvtt})$$

b) Ta có $R = OA, l = SA = a$.

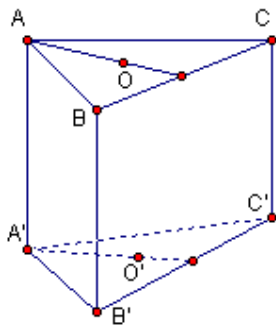
$$\text{Vậy } S_{xq} = \pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} a = \pi \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$$



Ví dụ 2.5: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a .

a) Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

b) Tính diện tích của mặt trụ tròn xoay ngoại tiếp hình trụ



a) Ta có $V = B.h$,

trong đó B là diện tích đáy của lăng trụ, h là chiều cao lăng trụ.

Vì tam giác ABC đều, có cạnh bằng a nên $B = S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$h = AA' = a \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} \text{ (đvtt)}$$

b) Diện tích xung quanh mặt trụ được tính theo công thức $S_{xq} = 2\pi.R.l$

R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

$$\Rightarrow R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, l = AA' = a$$

$$\text{Vậy diện tích cần tìm là } S_{xq} = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a = 2\pi \frac{a^2\sqrt{3}}{3} \text{ (đvdt)}$$

Ví dụ 2.6: Một hình nón có đường sinh bằng $2a$ và thiết diện qua trục là tam giác vuông.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón

b) Tính thể tích của khối nón

Giải

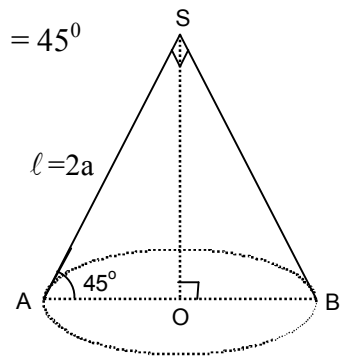
a) Thiết diện qua trục là tam giác SAB vuông cân tại S nên $\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ$

$$\Rightarrow SO = OA = h = R = \frac{\ell}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{xq} = \pi R \ell = \pi \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a = 2\sqrt{2}\pi a^2$$

$$\Rightarrow S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = 2\sqrt{2}\pi a^2 + 2\pi a^2 = (2\sqrt{2} + 2)\pi a^2$$

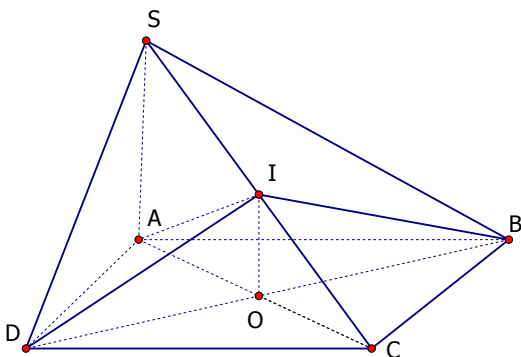
$$b) V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 2a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}$$



Ví dụ 2.7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm SC

a) Tính thể tích khối chóp $I.ABCD$

b) Tính thể tích khối nón ngoại tiếp khối chóp $I.ABCD$ (khối nón có đỉnh I và đáy là hình tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$)



a). Ta có $IO \perp (ABCD)$ và $IO = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$

$$\text{Thể tích } V_{I.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot IO = \frac{a^3}{6}$$

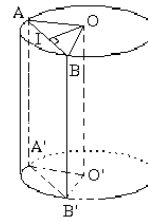
b). Ta có khối nón có $h = IO = \frac{a}{2}$

$$\text{Bán kính hình tròn đáy } R = OA = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{(N)} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\pi a^3}{12}$$

Bài Tập Về Mặt Tròn Xoay

Bài 2.1 Một hình trụ có khoảng cách hai đáy bằng $7a$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một đoạn $d = 3a$ theo một thiết diện có diện tích $S = 56a^2$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ.



Bài 2.2 Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng a . Tính thể tích khối nón và diện tích xung quanh của hình nón đã cho.

Bài 2.3 Cho hình nón tròn xoay có đường cao $h = a$, bán kính đáy $r = 1,5a$. Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích khối nón đã cho theo a .

Bài 2.4 Cho tam giác ABC vuông cân tại A, có $BC = 20\sqrt{2}$ (cm). Hình nón tròn xoay khi quay đường gấp khúc CBA xung quanh trục là đường thẳng chứa cạnh AB. Tính Diện tích xung quanh của hình nón và Thể tích của khối nón.

Bài 2.5 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Gọi O là tâm hình vuông ABCD

- Tính thể tích của hình chóp $O.A'B'C'$
- Tính diện tích xung quanh và thể tích khối nón có đỉnh là O và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$

Bài 2.6. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a có SA vuông góc với đáy và $SA = AC$.

- Tính thể tích khối chóp S.ABCD.
- Khi quay tam giác SAB quanh trục SA tạo ra hình nón. Tính diện tích xung quanh và thể tích của khối nón.

Bài 2.7. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a có SA vuông góc với đáy cạnh $SB = a\sqrt{3}$.

- Tính thể tích khối chóp S.ABCD.
- Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Bài 2.8. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Gọi I là trung điểm của BC.

- Tính thể tích khối chóp S.ABC và S.ABI theo a .
- Một hình nón có đỉnh trùng với đỉnh của hình chóp và đáy là hình tròn ngoại tiếp đa giác đáy của hình chóp. Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích khối nón.

Bài 2.9 Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy. Biết $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = 3a$.

- Tính thể tích khối chóp S.ABC.
- Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABC.

Bài 2.10 Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy. Biết $SA = AB = BC = a$.

- Tính thể tích khối chóp S.ABC.
- Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABC

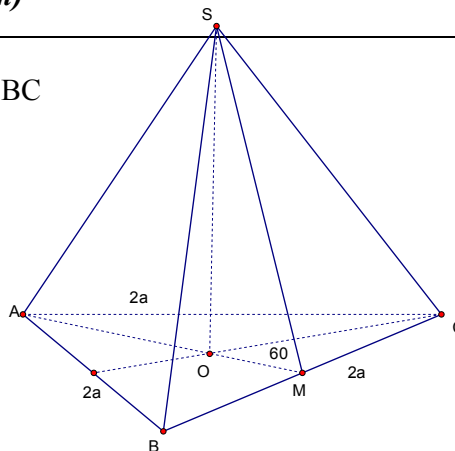
MỘT SỐ ĐỀ THI LIÊN QUAN ĐẾN THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

1. Đề Thi Học Kỳ 1- Năm học 2008-2009 (1,0 điểm)

Cho khối chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích của khối chóp S.ABC theo a .

2. Đề Thi Học Kỳ 1- Năm học 2009-2010 (2,0 điểm)

Gọi O là tâm của đáy và M là trung điểm của BC Do S.ABC là hình chóp tam giác đều nên: $\begin{cases} SO \perp (ABC) \\ g((SBC); (ABC)) = \widehat{SMO} = 60^\circ \end{cases}$ Vì tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a$ nên: $S_{\Delta ABC} = \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \sqrt{3} \quad \text{và} \quad OM = 2a \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ Xét tam giác vuông SMO: $SO = OM \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$ Vậy $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{3} \cdot a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$	0,25 0,25 0,25 0,25
--	---



Cho hình chóp S.ABC có $AB = BC = CA = a\sqrt{3}$; góc giữa các cạnh SA, SB, SC với mặt phẳng (ABC) bằng 60° .

a) Tính thể tích của khối chóp S.ABC.

b) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp này.

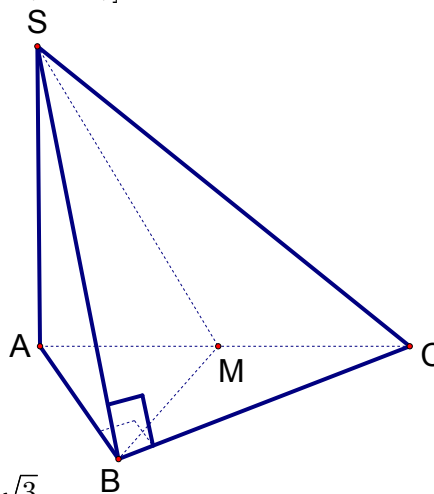
Đáp số : $V = \frac{3a^3}{4}, R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

3. Đề Thi Diễn Tập TN 2009. (1,0 điểm)

Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$, $AC = 2a$, góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC) bằng 60° . Gọi M là trung điểm của AC. Tính thể tích khối chóp S.BCM và khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC).

Giải

Tính thể tích khối chóp S.BCM và khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC).		1.0
Do $\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \widehat{SBA} = [\widehat{(SBC); (ABC)}] = 60^\circ$		0.25
Xét tam giác vuông SAB và SBC ta có: $\begin{cases} SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3a \\ SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a\sqrt{3} \\ BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a \\ dt(\Delta MBC) = \frac{1}{2} dt(\Delta ABC) = \frac{1}{4} AB \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \\ dt(\Delta SBC) = \frac{1}{2} SB \cdot BC = a^2 \sqrt{3} \end{cases}$		0.25
Suy ra: $V_{S.BCM} = \frac{1}{3} dt(\Delta MBC) \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 3a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$		0.25
$d(M, (SBC)) = \frac{3V_{S.BCM}}{dt(\Delta SBC)} = \frac{3 \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}}{a^2 \sqrt{3}} = \frac{3a}{4}$		0.25

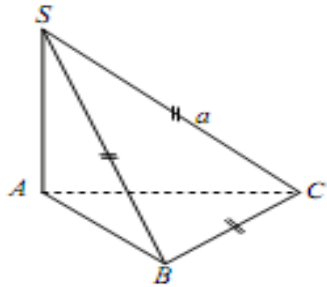
**4. Đề Thi Diễn Tập TN 2010. (1,0 điểm)**

Câu 3 (1,0 điểm). Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, $AC = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 60° . Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB, tính thể tích của khối chóp G.ABC theo a.

Đáp số : $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{36}$

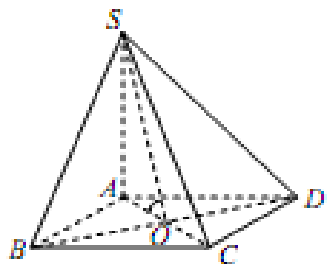
5. Đề thi TN 2009

Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $\widehat{BAC} = 120^\circ$, tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a .

Vì $SA \perp mp(ABC)$ nên $SA \perp AB$ và $SA \perp AC$. Xét hai tam giác vuông SAB và SAC, ta có $\left. \begin{array}{l} SA \text{ chung} \\ SB = SC \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta SAB = \Delta SAC$ $\Rightarrow AB = AC$		0,25
Áp dụng định lí côsin cho tam giác cân BAC, ta được $a^2 = BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos \widehat{BAC} = 2AB^2(1 - \cos 120^\circ) = 3AB^2$ Suy ra $AB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Do đó $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ và $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB^2.\sin \widehat{BAC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.		0,50
Vì vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.		0,25
<i>Lưu ý: Ở câu này, không cho điểm hình vẽ.</i>		

6. Đề thi TN 2010

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a

	Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AO \perp BD$. (1) Vì $SA \perp mp(ABCD)$ nên: SA là đường cao của khối chóp $S.ABCD$; $SA \perp BD$. (2) Từ (1) và (2) suy ra $BD \perp mp(SOA)$. Do đó $SO \perp BD$. (3) Từ (1) và (3) suy ra $\widehat{SOA}$ là góc giữa $mp(SBD)$ và $mp(ABCD)$. Do đó $\widehat{SOA} = 60^\circ$.	0,50
Xét tam giác vuông SAO, ta có: $SA = OA.\tan \widehat{SOA} = \frac{AC}{2}.\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$		0,25
Vì vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.		0,25

PHỤ LỤC ĐÁP SỐ

Phần I

1.1. $\frac{a^3}{3}$

1.2. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

1.3. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

1.4. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$

1.5. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$

1.6. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

1.7. $a^3\sqrt{3}$

1.8. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$

1.9. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

1.10. $\frac{1}{4}$

1.11. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

1.12. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

1.13. $S_{xq} = a(b + \sqrt{a^2 + b^2})$ $S_{tq} = a(a + b + \sqrt{a^2 + b^2})$ $V_{S,ABC} = \frac{1}{6}a^2b$ $V_{S,ABCD} = \frac{1}{3}a^2b$

1.14. b). $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

c). $R = \frac{AC}{2} \quad \frac{a\sqrt{2}}{2}$

1.15. $\frac{9a^3}{4}$, $R = OA = a\sqrt{3}$

1.16. a). $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

$$\text{b). } R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathbf{1.17.} \quad 10a^3$$

$$\mathbf{1.18.} \quad V = \frac{a^3}{3}, R = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\mathbf{1.19.} \quad V = \frac{3a^3}{2}$$

$$\mathbf{1.20.} \quad R = \frac{a\sqrt{6}}{4}, S = \frac{3\pi \cdot a^2}{2}. \quad V = \frac{\pi \cdot a^3 \sqrt{6}}{8}$$

$$\mathbf{1.21.} \quad R = \frac{a\sqrt{6}}{3}, S = \frac{8\pi \cdot a^2}{3}$$

$$V = \frac{8\pi \cdot a^3 \sqrt{6}}{27}$$

$$\mathbf{1.22.} \quad V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$$

$$\mathbf{1.23.} \quad V = \frac{a^3}{3}, h = \frac{a}{2}$$

Phần II

2.1. $S_{xq} = 70\pi a^2, V = 175\pi a^3$

2.2. $V = \frac{\pi a^3}{24}; S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{4}$

2.3. $S_{xq} = \frac{3\pi a^2 \sqrt{13}}{4}, V = \frac{3\pi a^3}{4}$

2.4. $S = 400\sqrt{2}\pi, V = \frac{8000}{3}\pi$

2.5. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{5}}{4}, V_{(N)} = \frac{\pi a^3}{12}$

2.6. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$

2.7. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$

2.8. $V_{S.ABI} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{11}}{24}$

2.9. $V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}, R = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

2.10. $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{6}$