

Bài 6. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ VÔ TỶ

☆☆☆

I. Hệ phương trình cơ bản

1. Hệ đối xứng loại I

VD 285. Giải các hệ phương trình sau:

- a) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x + xy + y = 3 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(1; 1)\}$.
- b) $\begin{cases} x + xy + y = 5 \\ x^2 y + y^2 x = 6 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(1; 2); (2; 1)\}$.
- c) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(-1; 2); (2; -1)\}$.
- d) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x + y + 1) + y(y + 1) = 2 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(\pm\sqrt{2}; \mp\sqrt{2}); (1; -2); (-2; 1)\}$.
- e) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x + y + 2xy = 2 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(2; 0); (0; 2)\}$.
- f) $\begin{cases} x^3 + x^3 y^3 + y^3 = 17 \\ x + xy + y = 5 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(1; 2); (2; 1)\}$.
- g) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 13 \\ x^4 + y^4 + x^2 y^2 = 91 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(\pm 3; \pm 1); (\pm 1; \pm 3)\}$.
- h) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^4 + y^4 + x^2 y^2 = 21 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(\pm 1; \pm 2); (\pm 2; \pm 1)\}$.
- i) $\begin{cases} x^4 + y^4 + 6x^2 y^2 = 41 \\ xy(x^2 + y^2) = 10 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(\pm 1; \pm 2); (\pm 2; \pm 1)\}$.

VD 286. Giải các hệ phương trình sau:

- a) $\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 9 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left\{ \left(1; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right); \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; 1 \right) \right\}$.
- b) $\begin{cases} (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{x^2 y^2} \right) = 49 \\ (x + y) \left(1 + \frac{1}{xy} \right) = 5 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left\{ \left(-1; \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2} \right); \left(\frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}; -1 \right) \right\}$.
- c) $\begin{cases} (x + y)(1 + xy) = 18xy \\ (x^2 + y^2)(1 + x^2 y^2) = 208x^2 y^2 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(0; 0); (7 \pm 4\sqrt{3}; 2 \pm \sqrt{3})\}$.
- d) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4xy \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2} = 4 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(1; 1)\}$.
- e) $\begin{cases} (x + y) \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) = 4 \\ (x^2 + y^2)(x^4 + y^4) = 4x^2 y^2 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(1; 1)\}$.

VD 287. Giải các hệ phương trình sau:

- a)
$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6 \\ x^2y + y^2x = 20 \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \{(1; 4); (4; 1)\}$.
- b)
$$\begin{cases} 2(x + y) = 3(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \{(64; 8); (8; 64)\}$.
- c)
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \{(4; 4)\}$.
- d)
$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \{(3; 3)\}$.
- e)
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y^2 - 1} = \sqrt{xy + 2} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1 \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \{(\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{2})\}$.
- f)
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 3 \\ x + y = 5 + \sqrt{(x-1)(y-1)} \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \{(2; 5); (5; 2)\}$.
- g)
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + xy} + 3\sqrt{xy} = 4\sqrt{3} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \{(2; 2)\}$.

2. Hệ đối xứng loại II

VD 288. Giải các hệ phương trình sau:

- a)
$$\begin{cases} x^2 - 4x = 3y \\ y^2 - 4y = 3x \end{cases}$$
 ĐS: $\left\{ (0; 0); (7; 7); \left(\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}; \frac{1 \mp \sqrt{13}}{2} \right) \right\}$.
- b)
$$\begin{cases} x^2 - xy = 3(2 + y) \\ y^2 - xy = 3(2 + x) \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \left\{ (-2; -2); \left(-\frac{3 + \sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3} - 3}{2} \right) \right\}$.
- c)
$$\begin{cases} xy + x^2 = 1 + y \\ xy + y^2 = 1 + x \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \left\{ (1; 1); \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right); (a; -a - 1) \right\}$.
- d)
$$\begin{cases} (x-1)(y^2 + 6) = y(x^2 + 1) \\ (y-1)(x^2 + 6) = x(y^2 + 1) \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \{(2; 2); (3; 3); (3; 2); (2; 3)\}$.
- e)
$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \left\{ (1; 1); \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right) \right\}$.
- f)
$$\begin{cases} 2x + \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \\ 2y + \frac{1}{x} = \frac{3}{y} \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \{(\pm 1; \pm 1); (\pm\sqrt{2}; \mp\sqrt{2})\}$.
- g)
$$\begin{cases} (5x - 4y)(3x + 2y) = 7y - 2x \\ (5y - 4x)(3y + 2x) = 7x - 2y \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \{(0; 0); (1; 1)\}$.
- h)
$$\begin{cases} (6x + 4y)(x^2 + y^2 - 1) = 5y(x^2 + 1) \\ (6y + 4x)(x^2 + y^2 - 1) = 5x(y^2 + 1) \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \{(0; 0); (\pm 1; \pm 1)\}$.
- i)
$$\begin{cases} x^4 + y^2 - xy^3 - \frac{9}{8}x = 0 \\ y^4 + x^2 - yx^3 - \frac{9}{8}y = 0 \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \left\{ (0; 0); \left(\frac{9}{8}; \frac{9}{8} \right); \left(1; \frac{1}{2} \right); \left(\frac{1}{2}; 1 \right) \right\}$.

VD 289. Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2-y} = \sqrt{2} \\ \sqrt{y} + \sqrt{2-x} = \sqrt{2} \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \{(0;0), (2;2)\}$.

b)
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{7-y} = 4 \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{7-x} = 4 \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = (8;8)$.

c)
$$\begin{cases} \sqrt{x+5} + \sqrt{y-2} = 7 \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{y+5} = 7 \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = (11;11)$.

d)
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+3} + 2\sqrt{x} = 3 + \sqrt{y} \\ \sqrt{y^2+3} + 2\sqrt{y} = 3 + \sqrt{x} \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = (1;1)$.

e)
$$\begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 \\ \sqrt{2y+3} + \sqrt{4-x} = 4 \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \left\{ (3;3), \left(\frac{11}{9}; \frac{11}{9} \right) \right\}$.

f)
$$\begin{cases} x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = 2 \\ x\sqrt{1+x^2} + y\sqrt{1+y^2} = 2 \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \left\{ \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}; \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \right) \right\}$.

g)
$$\begin{cases} x\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = x - y^2 \\ y\sqrt{(1-y^2)(1-x^2)} = y - x^2 \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \{(0;0); (1;1)\}$.

VD 290. Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} (x+y)(3xy - 4\sqrt{x}) = -2 \\ (x+y)(3xy + 4\sqrt{y}) = 2 \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \left(2\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)^2}; \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)^2} \right)$.

b)
$$\begin{cases} x^4 + 8y = 4(x^3 - 1) - 16\sqrt{3} \\ y^4 + 8x = 4(y^3 - 1) + 16\sqrt{3} \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = (1 \pm \sqrt{3}; 1 \pm \sqrt{3})$.

c)
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x+y+1} + x + \sqrt{y^2+x+y+1} + y = 18 \\ \sqrt{x^2+x+y+1} - x + \sqrt{y^2+x+y+1} - y = 2 \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = (4;4)$.

d)
$$\begin{cases} \left(1 - \frac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x} = 2 \\ \left(1 + \frac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y} = 6 \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = (4 + 2\sqrt{3}; 12 + 6\sqrt{3})$.

e)
$$\begin{cases} 2x\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right) = 3 \\ 2y\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right) = 1 \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \left\{ (1;1); \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right) \right\}$.

f)
$$\begin{cases} x + \frac{78y}{x^2+y^2} = 20 \\ y + \frac{78x}{x^2+y^2} = 15 \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \{(2;3); (18;12)\}$.

g)
$$\begin{cases} 2x^2 + \sqrt{2-x} + \sqrt{y-1} - 34 = x + 2xy \\ 2y^2 + \sqrt{2-x} + \sqrt{y-1} - 34 = 2y - xy \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = (-2;5)$.

3. Hệ đẳng cấp và phương pháp thế tạo phương trình bậc cao hoặc phương trình đẳng cấp

VD 291. Giải các hệ phương trình sau:

- a) $\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 16 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(-2; 1); (2; -1)\}$.
- b) $\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 2 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left\{ \left(\pm \frac{3\sqrt{17}}{17}; \mp \frac{8\sqrt{17}}{17} \right) \right\}$.
- c) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 1 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(\pm 1; \pm 1)\}$.
- d) $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 - 13xy + 15y^2 = 0 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left\{ (\pm 3; \pm 2), \left(\pm \frac{5}{\sqrt{2}}; \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$.
- e) $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left\{ (\pm 1; \pm 2); \left(\pm \frac{4\sqrt{3}}{3}; \mp \frac{5\sqrt{3}}{3} \right) \right\}$.
- f) $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 - 13xy + 15y^2 = 18 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left\{ (\pm 3; 0); \left(\pm \frac{3\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$.

VD 292. Giải các hệ phương trình sau:

- a) $\begin{cases} 14x^2 - 21y^2 + 22x - 39y = 0 \\ 35x^2 + 28y^2 + 111x - 10y = 0 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(0; 0), (-3; 1)\}$.
- b) $\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38 \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(-3; -1), (3; 1)\}$.
- c) $\begin{cases} 2x^2 - x(y - 1) + y^2 = 3y \\ x^2 + xy - 3y^2 = x - 2y \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left\{ (0; 0); (\pm 1; 1); \left(\frac{7}{43}; \frac{3}{43} \right) \right\}$.
- d) $\begin{cases} 14x^2 - 21y^2 - 6x + 45y - 14 = 0 \\ 35x^2 + 28y^2 + 41x - 122y + 56 = 0 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(1; 2), (-2; 3)\}$.

VD 293. Giải các hệ phương trình sau:

- a) $\begin{cases} x^3 - 2xy + 5y = 7 \\ 3x^2 - 2x + y = 3 \end{cases}$ ĐS: $\left\{ (1; 2); \left(\frac{6 \pm 2\sqrt{33}}{7}; \frac{-153 \mp 44\sqrt{23}}{49} \right) \right\}$.
- b) $\begin{cases} xy = x + 7y + 1 \\ x^2y^2 = 10y^2 - 1 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left\{ (3; -1); \left(1; -\frac{1}{3} \right) \right\}$.
- c) $\begin{cases} 2x^3 + y(x + 1) = 4x^2 \\ 5x^4 - 4x^6 = y^2 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(0; 0); (1; 1); (2; 2)\}$.
- d) $\begin{cases} x^2(y + 1)(y + x + 1) = 3x^2 - 4x + 1 \\ x(y + 1) + 1 = x^2 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left\{ (1; -1); \left(-2; -\frac{5}{2} \right) \right\}$.
- e) $\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left(-4; \frac{17}{4} \right)$.
- f) $\begin{cases} x - \sqrt{y + 1} = \frac{5}{2} \\ y + 2(x - 3)\sqrt{x + 1} = -\frac{3}{4} \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left(3; -\frac{3}{4} \right)$.

VD 294. Giải các hệ phương trình sau:

- a) $\begin{cases} 5x^2 - 3y = x - 3xy \\ x^3 - x^2 = y^2 - 3y^3 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left\{ \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right); (-1; 1) \right\}$.
- b) $\begin{cases} x^3 + y^3 - xy^2 = 1 \\ 4x^4 + y^4 = 4x + y \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = (0; 1); (1; 0); (1; 1); \left(\frac{1}{\sqrt[3]{25}}; \frac{1}{\sqrt[3]{25}} \right)$.
- c) $\begin{cases} x^3 - 2y^3 = x + 4y \\ 13x^2 - 41xy + 21y^2 = -9 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(2; 1); (-2; -1)\}$.
- d) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right), \left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}; \frac{2\sqrt[3]{3}}{3} \right) \right\}$.
- e) $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}$ ĐS: $(\pm 1; -3); \left(\sqrt{\frac{6}{13}}; 4\sqrt{\frac{6}{13}} \right)$.
- f) $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(0; \pm 2); (1; -3); (-1; 3)\}$.
- g) $\begin{cases} 2x^3 - 9y^3 = (x - y)(2xy + 3) \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(\pm 2; \pm 1)\}$.
- h) $\begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \\ y^4 + y = x \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(2; 1), (2\sqrt[3]{3}; -\sqrt[3]{3})\}$.
- i) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x + y)(4 - x^2y^2 - 2xy) = 2y^5 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(\pm 1; \pm 1)\}$.

II. Biến đổi một phương trình về tích số, kết hợp với phương trình còn lại

1. Sử dụng tách, ghép, nhóm và tam thức bậc hai đưa 1 phương trình về tích

VD 295. Giải các hệ phương trình sau:

- a) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x^2 - xy - 2y^2 = -x + 2y \end{cases}$ **(CĐ – 2014)** ĐS: $(x; y) = \{(\pm 2; \pm 1); (2; -3); (-3; 2)\}$.
- b) $\begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases}$ **(D – 2012)** ĐS: $(x; y) = \left\{ (1; 1), \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \pm \sqrt{5} \right) \right\}$.
- c) $\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x + y) = 0 \\ xy(x^2 + y^2) + 2 = (x + y)^2 \end{cases}$ **(A – 2011)** ĐS: $(x; y) = \left\{ (\pm 1; \pm 1), \left(\pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right) \right\}$.
- d) $\begin{cases} 2y^2 + xy - x^2 = 0 \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0 \end{cases}$ ĐS: $\left[\left(-13 \pm \sqrt{157}; \frac{-13 \mp \sqrt{157}}{2} \right), (1; -1), (3; -3) \right]$.
- e) $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 5x - y - 2 \\ x^2 + y^2 + x + y = 4 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left\{ (1; 1), \left(-\frac{4}{5}; -\frac{13}{5} \right) \right\}$.
- f) $\begin{cases} x^2 + 5x - xy = 3y - 6 \\ 4x^2y - 3xy + 2y^2 = 9 \end{cases}$ ĐS: $\left\{ \left(-3; \frac{-45 \pm 3\sqrt{233}}{4} \right), (-1; 1), \left(\frac{1}{4}; \frac{9}{4} \right) \right\}$.
- g) $\begin{cases} 2x^3 + 2x^2y - xy = y^2 - x - y \\ 2x^3 - xy + x^2 = 4 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left\{ (1; -1), \left(\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}; 10 \pm \sqrt{17} \right) \right\}$.
- h) $\begin{cases} 2x^2 - 8xy^2 - xy + 4y^3 = 0 \\ 16x^3 + 2x - 8y^2 + 5 = 0 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left\{ \left(\frac{1}{2}; 1 \right), \left(\frac{3 \pm \sqrt{19}}{4}; \frac{3 \pm \sqrt{19}}{2} \right) \right\}$.

$$i) \begin{cases} x^3 - 3x^2 + x + 3y = xy + 3 \\ 2y^2 - 3xy - 9x^2 + 3x = y \end{cases} \quad \text{ĐS: } \left\{ (3; -4), (3; 9), (-1; 2), \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4} \right) \right\}.$$

VD 296. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases} \quad (\text{D} - 2008) \quad \text{ĐS: } (x; y) = \{(2; 5)\}.$$

$$b) \begin{cases} y^4 - 2xy^2 + 7y^2 = -x^2 + 7x + 8 \\ \sqrt{3y^2 + 13} - \sqrt{15 - 2x} = \sqrt{x + 1} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \{(3; -2), (3; 2)\}.$$

$$c) \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 1 + \sqrt{x^2 - y^2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (1; 0).$$

$$d) \begin{cases} x - 2y - \sqrt{xy} = 0 \\ \sqrt{x-1} - \sqrt{2y-1} = 1 \end{cases} \quad \text{HD: } (1) \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - 2\sqrt{y}) = 0.$$

$$e) \begin{cases} x^3 - 6x^2y + 9xy^2 - 4y^3 = 0 \\ \sqrt{x-y} + \sqrt{x+y} = 2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \{(2; 2), (32 - 8\sqrt{15}; 8 - 2\sqrt{15})\}.$$

$$f) \begin{cases} 2 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x + \sqrt{x-2y}} = x + 3y - 2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ (12; -2), \left(\frac{8}{3}; \frac{4}{9} \right) \right\}.$$

$$g) \begin{cases} y^2 + (y-3)x - 4y = -3 \\ \sqrt[3]{x-2} + \sqrt{2-y} = 3 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (3; 2).$$

$$h) \begin{cases} 3y^2 + 1 + 2y(x+1) = 4y\sqrt{x^2 + 2y + 1} \\ y(y-x) = 3 - 3y \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ (1; 1), \left(\frac{415}{51}; \frac{17}{3} \right) \right\}.$$

$$i) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \sqrt{y-1}(x+y-1) = (y-2)\sqrt{x+y} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (-1; 2).$$

$$j) \begin{cases} x^3 + 2y^2 = x^2y + 2xy \\ 2\sqrt{x^2 - 2y - 1} + \sqrt[3]{y^3 - 14} = x - 2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (1 \pm \sqrt{2}; 1 \pm \sqrt{2}).$$

$$k) \begin{cases} 2x(y+1) - 2y(y-1) = 3 \\ \sqrt{x^2 + y} - x = \frac{4+y}{2\sqrt{x^2 + y}} \end{cases} \quad \text{HD: } (2) \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + y} - x)^2 = 4.$$

$$l) \begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \{(1; 0), (-2; 3)\}.$$

$$m) \begin{cases} x^3 - 3x^2y - 4x^2 + 4y^3 + 16xy - 16y^2 = 0 \\ \sqrt{x-2y} + \sqrt{x+y} = 2\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ (8; 4), \left(8 - \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3} - 4 \right) \right\}.$$

$$n) \begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 3(x^2 + y^2) + 2 \\ 4\sqrt{x+2} + \sqrt{16-3y} = x^2 + 8 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \{(2; 0), (-1; -3)\}.$$

$$o) \begin{cases} x + y = 2 \\ 4x^2 + y^2 = 5(2x - y)\sqrt{xy} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (1; 1), \left(\frac{22 + 8\sqrt{6}}{25}; \frac{22 - 8\sqrt{6}}{25} \right).$$

$$p) \begin{cases} y^2 - xy + 2y - 3x - 3 = 0 \\ \sqrt{2x-3} = (y^2 + 2015)(5-y) + \sqrt{y} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (4; 5).$$

$$q) \begin{cases} (x-y)(x+y+y^2) = x(y+1) \\ \sqrt{x^3+4x} = 1 + \frac{(y+2)^2}{3} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (2; 3).$$

2. Liên hợp đưa 1 phương trình về tích số

VD 297. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 4})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2 \\ 6y^2 - 5y + 1 = \sqrt[3]{x^3 + 1} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ (0; 0); \left(-1; \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

$$b) \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x+3} = \frac{y-3}{x} \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x} = x+3 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (1; 8).$$

$$c) \begin{cases} \sqrt{2x+y-1} - \sqrt{x+2y-2} = y-x-1 \\ x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 3y = 0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (2; 3).$$

$$d) \begin{cases} x + \sqrt{2y+3} = y + \sqrt{2x+1} + 1 \\ \sqrt[3]{x^3 + 7x^2 + 11(y+1) + 5} + x^2 - y - 4 = \sqrt{5x+7} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}; \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \right).$$

$$e) \begin{cases} \sqrt{x+y+1} + 1 = 4(x+y)^2 + \sqrt{3(x+y)} \\ \sqrt{2x+2y} + 2x - y = \frac{5}{2} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{6} \right).$$

$$f) \begin{cases} x^3 + \sqrt{x^2 + 2y + 1} = x^2y + y + 1 \\ (x+y-1)\sqrt{y+1} = 10 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (3; 3).$$

$$g) \begin{cases} \sqrt{x+2y} + \sqrt{2x-y} + x^2y = \sqrt{x} + \sqrt{3y} + y^2x \\ 2(1-y)\sqrt{x^2+2y-1} = y^2 - 2x - 1 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (\sqrt{6}-1; \sqrt{6}-1).$$

$$h) \begin{cases} \sqrt{xy} - (x-y)(\sqrt{xy}-2) + \sqrt{x} = \sqrt{y} + y \\ (x+1)[y + \sqrt{xy} + x(1-x)] = 4 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (1; 1).$$

$$i) \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - \sqrt{y^4+2} = y \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{(A - 2013) ĐS: } (x; y) = \{(1; 0); (2; 1)\}.$$

$$j) \begin{cases} (1-y)\sqrt{x-y} + x = 2 + (x-y-1)\sqrt{y} \\ 2y^2 - 3x + 6y + 1 = 2\sqrt{x-2y} - \sqrt{4x-5y-3} \end{cases} \quad \text{(B.14) ĐS: } (x; y) = \left\{ (3; 1); \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \right\}.$$

$$k) \begin{cases} (1-y)\sqrt{x+y} + x + 3y = 6 + (x+y-4)\sqrt{y} \\ \sqrt{x-2y} - \sqrt{x+1} = \frac{5}{x-y-7} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (3; 1).$$

$$l) \begin{cases} \sqrt{(x+1)y} + (x-y+1)\sqrt{y} + \sqrt{x+1} = y + \sqrt{y} \\ \sqrt{3x-2} - \sqrt{y} = 2x^2 - y - 2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2} \right).$$

$$m) \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2(y-1)(x-y)} + \sqrt{xy} = 2y \\ x(2x+2y-5) + y(y-3) + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ (1; 1); \left(\frac{3}{5}; \frac{3}{5} \right) \right\}.$$

$$n) \begin{cases} \sqrt{4x^2 + (4x-9)(x-y)} + \sqrt{xy} = 3y \\ 4\sqrt{(x+2)(y+2x)} = 3(x+3) \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (1; 1).$$

- o)
$$\begin{cases} x(x+y) + \sqrt{x+y} = 2y^2 - \sqrt{2y} \\ x^2y - 5x^2 + 7x + 7y - 4 = 6\sqrt{xy-x+1} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (1;1).$$
- p)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2\sqrt{2x^2 - 3xy + 2y^2} = x + y + 2xy \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 3x - 4y + 4 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (2;2).$$
- q)
$$\begin{cases} (x+1)\sqrt{y^2+y+2} + (y-1)\sqrt{x^2+x+1} = x+y \\ (x^2+x)\sqrt{x-y+3} = 2x^2+x+y+1 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = \left\{ \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right); \left(\frac{7}{8}; -\frac{1}{8} \right); (-1; -2) \right\}.$$
- r)
$$\begin{cases} (x-y-1)\sqrt{x} + 2 = 2x - y + (1-x)\sqrt{x-y} \\ \sqrt{x+y+3} = 2 \left(\sqrt{1-x} + \sqrt{\frac{x+2y+1}{2x+y}} \right) \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (1;0).$$
- s)
$$\begin{cases} \sqrt{2x} + \sqrt{2y} = 4 \\ \sqrt{2x+5} + \sqrt{2y+5} = 6 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (2;2).$$

VD 298. Giải các hệ phương trình sau:

- a)
$$\begin{cases} \sqrt{x^2-x-y} = \frac{y}{\sqrt[3]{x-y}} \\ 2(x^2+y^2) - 3\sqrt{2x-1} = 11 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = \left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2} \right).$$
- b)
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x^3+x^2+y^2+xy} = \frac{y^2}{\sqrt{x+xy+1}} \\ (x-1)\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x-y} + \sqrt{y-2} + 4x - 3y \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (2;3).$$
- c)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \sqrt{8x^2 - 12xy + 8y^2} = x + y + 2xy \\ (y+1)\sqrt{4x+5} + 2(x+5)\sqrt{y+3} = 3y^2 + 14x + 13 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = \{(1;1)\}.$$
- d)
$$\begin{cases} x - 3\sqrt{x+3} = 3\sqrt{y-5} - y \\ \sqrt{x^2+16(y-x)} + y = 2\sqrt{xy} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (6;6).$$
- e)
$$\begin{cases} y + \sqrt{3y^2 - 2y + 3x^2 + 6} = 3x + \sqrt{7x^2 + 7} + 2 \\ 3y^2 - 4x^2 - 3y + 3x + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = \left\{ (-1; -1); \left(-\frac{7}{23}; \frac{25}{23} \right) \right\}.$$
- f)
$$\begin{cases} \sqrt{2(x^2+y^2) + 2(5x-3y) - 4(xy-3)} + \sqrt{x+1} = 3\sqrt{y} \\ \sqrt{y^2 - 4(x+y) + 17} - \sqrt{x-y+3} = 2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (2;4).$$
- g)
$$\begin{cases} (x-y+2)\sqrt{x+1} = \sqrt{y} \\ (4-\sqrt{x+1})\sqrt{x+1} = 3y - 2 + 2\sqrt{1-x} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = \left\{ (0;1); \left(-\frac{3}{5}; \frac{2}{5} \right) \right\}.$$
- h)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy - 2x + y - 9 = 0 \\ 2x + 8 + \sqrt{2x+1} = 4y^2 - 3y + \sqrt{2y-1} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (1;2).$$
- i)
$$\begin{cases} (x+y)\sqrt{x-y+2} = x + 3y + 2 \\ (x-y)\sqrt{x-y+2} = (x+y+1)\sqrt{x+y-2} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = \left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2} \right).$$
- j)
$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{y+1} + \sqrt{y} - \sqrt{x^3-1} \\ (8y - 6x + 9)\sqrt{4x^2+21} + 16x^4 - 12x^2 + 2x = 21 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (1;1).$$

3. Đưa về tích số đưa vào phương pháp công**VD 299.** Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{5} \\ 4x^2 + 3x - \frac{57}{25} = -y(3x+1) \end{cases} & \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5} \right); \left(\frac{11}{5}; \frac{2}{25} \right) \right\}. \\ \text{b) } & \begin{cases} 14x^2 - 21y^2 - 6x + 45y - 14 = 0 \\ 35x^2 + 28y^2 + 41x - 122y + 56 = 0 \end{cases} & \text{ĐS: } (x; y) = \{(-2; 3); (1; 2)\}. \\ \text{c) } & \begin{cases} xy - 3x = 2(y+8) \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases} & \text{ĐS: } (x; y) = \{(-3 \pm \sqrt{3}; -2 \mp \sqrt{3})\}. \\ \text{d) } & \begin{cases} 2x^2 + 3xy + 2x + y = 0 \\ x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x = 0 \end{cases} & \text{ĐS: } (0; 0); \left(-\frac{3}{5}; -\frac{3}{5}\right); (-3 \pm 2\sqrt{2}; 2 \mp \sqrt{2}). \end{aligned}$$

VD 300. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} x^3 - y^3 = 35 \\ 2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y \end{cases} & \text{ĐS: } (x; y) = \{(2; -3); (3; -2)\}. \\ \text{b) } & \begin{cases} x^3 - y^3 = 9 \\ 2x^2 + y^2 - 4x + y = 0 \end{cases} & \text{ĐS: } (x; y) = \{(2; -1); (1; -2)\}. \\ \text{c) } & \begin{cases} x^3 + y^3 = 91 \\ 4x^2 + 3y^2 = 16x + 9y \end{cases} & \text{ĐS: } (x; y) = \{(3; 4); (4; 3)\}. \\ \text{d) } & \begin{cases} x^3 - y^3 - 3y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = x - 4y \end{cases} & \text{ĐS: } (x; y) = \left(\frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}; \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{4} \right). \end{aligned}$$

VD 301. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} x^2y^3 + 3x^2 - 4x + 2 = 0 \\ x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \end{cases} & \text{ĐS: } (x; y) = (1; -1). \\ \text{b) } & \begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 6xy - 3x - 49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 10y - 25x - 9 \end{cases} & \text{ĐS: } (x; y) = \{(-1; 5); (-1; 3)\}. \\ \text{c) } & \begin{cases} 2(x+y)(25-xy) = 4x^2 + 17y^2 + 105 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y = 7 \end{cases} & \text{ĐS: } (x; y) = (2; 1). \\ \text{d) } & \begin{cases} 6x^2y + 2y^3 + 35 = 0 \\ 5x^2 + 5y^2 + 2xy + 5x + 13y = 0 \end{cases} & \text{ĐS: } (x; y) = \left(\pm \frac{1}{2}; -\frac{5}{2} \right). \\ \text{e) } & \begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases} & \text{ĐS: } (x; y) = \{(-1; -4); (-1; 4)\}. \end{aligned}$$

VD 302. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} x^2y^2 + 3x + 3y - 3 = 0 \\ x^2y - 4xy - 3y^2 + 2y - x + 1 = 0 \end{cases} & \text{ĐS: } (x; y) = \{(0; 1); (1; 0)\}. \\ \text{b) } & \begin{cases} 3x^2 + xy - 9x - y^2 - 9y = 0 \\ 2x^3 - 20x - x^2y - 20y = 0 \end{cases} & \text{ĐS: } (x; y) = \{(0; 0); (2; -1); (10; 15)\}. \\ \text{c) } & \begin{cases} x^2 - 2xy + x + y = 0 \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 + y^2 = 0 \end{cases} & \text{ĐS: } (x; y) = \{(0; 0); (2; 2); (1; 2)\}. \end{aligned}$$

III. Đặt ẩn phụ giải hệ phương trình đại số – vô tỷ

1. Loại 1. Đặt hai ẩn đưa về phương trình đẳng cấp

VD 303. Giải các hệ phương trình sau:

- a)
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 2\sqrt{y} \\ \sqrt{x} + \sqrt{5y} = 3 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(1; \frac{4}{5}\right).$$
- b)
$$\begin{cases} x^2 - 2 = 4y\sqrt{y+1} \\ 22(y-1)^2 = (x^2+9)(x^2+9y) \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \{(-\sqrt{2}; 0); (\sqrt{2}; 0)\}.$$
- c)
$$\begin{cases} (x+6y+3)\sqrt{xy+3y} = y(8y+3x+9) \\ \sqrt{-x^2+8x-24y+417} = (y+3)\sqrt{y-1} + 3y+17 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (1; 1).$$
- d)
$$\begin{cases} x+3 = 2\sqrt{(y+1)(3y-x)} \\ \sqrt{3y-2} - \sqrt{\frac{x+5}{2}} = xy - 2y - 2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (3; 2).$$
- e)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16 \\ \frac{x^2}{8y} + \frac{2x}{3} = \sqrt{\frac{x^3}{3y} + \frac{x^2}{4}} - \frac{y}{2} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{\left(\frac{24}{7}; \frac{4}{7}\right); (-8; 12)\right\}.$$

2. Loại 2. Đặt ẩn phụ dạng tổng – hiệu $a = x + y; b = x - y$.

VD 304. Giải các hệ phương trình sau:

- a)
$$\begin{cases} 2x + 2x^2 - 2y^2 = 7 \\ 2(x^2 + y^2) = 5 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)\right\}.$$
- b)
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 6} - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \{(-3; 2); (1; 2)\}.$$
- c)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 1 \\ x + \sqrt{x^2 + 1} = y + \sqrt{y^2 - 1} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{(0; 1); \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right\}.$$
- d)
$$\begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 3 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (1; 0).$$
- e)
$$\begin{cases} 8(x^2 + y^2) + 4xy + \frac{5}{(x+y)^2} = 13 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 1 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (0; 1).$$
- f)
$$\begin{cases} (4x^2 - 4xy + 4y^2 - 51)(x - y)^2 + 3 = 0 \\ (2x - 7)(x - y) + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(\frac{5 \pm \sqrt{3}}{2}; \frac{5 \mp \sqrt{3}}{3}\right).$$
- g)
$$\begin{cases} \frac{2xy + y\sqrt{x^2 - y^2}}{14} = \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{x-y}{2}} \\ \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^3} + \sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^3} = 9 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (5; 3).$$

$$h) \begin{cases} (x-y)^2 + \frac{4xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{3x+y} + 4x = (3x+y-6)^2 + 4\sqrt{x+y} \end{cases} \quad \text{ĐS: } \left\{ \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right); \left(\frac{13+\sqrt{29}}{4}; \frac{-9-\sqrt{29}}{4} \right) \right\}.$$

3. **Loại 3. Đặt ẩn phụ dạng** $a = x + \frac{1}{x}; b = y + \frac{1}{y}$ **hoặc** $a = x + \frac{1}{y}; b = y + \frac{1}{x}$.

VD 305. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} xy + \frac{1}{xy} + \frac{x^2 + y^2}{xy} = 5 \\ (x+y) \left(1 + \frac{1}{xy} \right) = 6 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ \left(1; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right); \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; 1 \right) \right\}.$$

$$b) \begin{cases} (x+y)(1+xy) = 18xy \\ (x^2 + y^2)(1+x^2y^2) = 208x^2y^2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } \left\{ (2 \pm \sqrt{3}; 7 \pm 4\sqrt{3}); (7 \pm 4\sqrt{3}; 2 \pm \sqrt{3}) \right\}; (0; 0)$$

$$c) \begin{cases} 2x - y - xy^2 = 2xy(1-x) \\ (x^2 + 2y^2) \left(1 + \frac{1}{xy} \right)^2 = 12 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (1; 1).$$

$$d) \begin{cases} (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{xy} \right)^2 = 8 \\ xy(2x + y - 6) + y + 2x = 0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (1; 1).$$

$$e) \begin{cases} (x^3 + y^3) \left(1 + \frac{1}{xy} \right)^3 = \frac{125}{4} \\ (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{xy} \right)^2 = \frac{25}{2} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ (2; 2); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

4. **Loại 4. Chia để xác định lượng đặt ẩn phụ**

$$a) \begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ (3; 1); \left(1; \frac{1}{3} \right) \right\}.$$

$$b) \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3x - 2 \\ (x^2 + xy)^4 + (y^2 + 2)^4 = 17x^4 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \{(1; 0); (3; -2); (2; 0); (3; -1)\}.$$

$$c) \begin{cases} 1 + x^3y^3 = 19x^3 \\ y + xy^2 = -6x^2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ \left(\frac{1}{3}; -2 \right); \left(-\frac{1}{2}; 3 \right) \right\}.$$

$$d) \begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \{(1; 2); (-2; 5)\}.$$

$$e) \begin{cases} x^2 - y\sqrt{x+y} = y - 1 \\ x^2(x+y-2) + x = 5y + 2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ \left(\frac{-3 \pm \sqrt{53}}{2}; \frac{11 \mp \sqrt{53}}{2} \right) \right\}.$$

$$f) \begin{cases} x^2y^2 + 2y^2 + 16 = 11xy \\ x^2 + 2y^2 + 12y = 3xy^2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } \left\{ (4; 2); (-2; -1); \left(\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \right) \right\}.$$

$$g) \begin{cases} \sqrt{xy+x+2} + \sqrt{x^2+x} - 4\sqrt{x} = 0 \\ xy + x^2 + 2 = x(\sqrt{xy+2} + 3) \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(3; \frac{7}{3} \right).$$

$$\text{h) } \begin{cases} (2x+y-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{xy}+\sqrt{x})=8\sqrt{x} \\ (\sqrt{x+3}+\sqrt{xy})^2+xy=2x(6-x) \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (1;1).$$

$$\text{i) } \begin{cases} (x^2-1)^2+3=\frac{6x^5y}{x^2+2} \\ 3y-x=\sqrt{\frac{4x-3x^2y-9xy^2}{x+3y}} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = \left(-\sqrt{1-\sqrt{5}}; -\frac{2}{3\sqrt{1-\sqrt{5}}}\right).$$

5. Loại 5. Liên hợp để tìm ra phép đặt ẩn phụ

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt{x^2+2}+\sqrt{y^2+3}+x+y=5 \\ \sqrt{x^2+2}+\sqrt{y^2+3}-x-y=2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = \left\{\left(\frac{7}{6}; \frac{1}{4}\right); \left(\frac{17}{20}; \frac{13}{20}\right)\right\}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{2x}+\sqrt{2y}=4 \\ \sqrt{2x+5}+\sqrt{2y+5}=6 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (2;2).$$

$$\text{c) } \begin{cases} x\sqrt{y^2+6}+y\sqrt{x^2+3}=7xy \\ x\sqrt{x^2+3}+y\sqrt{y^2+6}=x^2+y^2+2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = \left\{\left(1; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}; \frac{2\sqrt{30}}{15}\right)\right\}.$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{x^2}{y^2}+2\sqrt{x^2+1}+y^2=3 \\ x+\frac{y}{\sqrt{1+x^2}+x}+y^2=0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (0;-1).$$

6. Loại 6. Dựa vào định lý đảo Viét để tìm ra cách đặt ẩn phụ

$$\text{a) } \begin{cases} x^2+y^2+xy+y=8 \\ xy(y^2+xy+x+y)=12 \end{cases} \quad \text{ĐS: } \begin{cases} (x;y) = (2;1); (-3;1); (1\pm\sqrt{7}; 2) \\ (x;y) = (1\pm\sqrt{3}; 2); \left(\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}\right) \end{cases}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x^2+xy+y=5 \\ x^4+x^3y+x^2(y+1)+xy+y=9 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (\pm\sqrt{2}; \pm 1 \pm \sqrt{2}).$$

$$\text{c) } \begin{cases} x^2+xy+y^2+x+\frac{y^3}{x+1}=2 \\ 2x+y+\frac{y^2}{x+1}=2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } \left\{(0;1); (1;0); \left(\frac{\pm 1 \pm \sqrt{17}}{4}; \mp 1 \pm \frac{\sqrt{17}}{4}\right)\right\}.$$

$$\text{d) } \begin{cases} y^2+x+xy-6y+1=0 \\ y^3x-8y^2+x^2y+x=0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (1;2).$$

$$\text{e) } \begin{cases} x^2+xy+y^2=3y-1 \\ x^3+x^2y=x^2-x+1 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = \left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}; \frac{5\mp\sqrt{5}}{2}\right).$$

$$\text{f) } \begin{cases} 2x^2+xy=1 \\ \frac{9x^2}{2(1-x)^4}=1+\frac{3xy}{2(1-x)^2} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = \left(\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}; 2\right).$$

7. Loại 7. Biến đổi để xác định lượng đặt ẩn phụ

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt{4x+y}+\sqrt{2x+y}=2 \\ \sqrt{2x+y}+x+y=1 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = \left(3-\sqrt{5}; \frac{3\sqrt{5}-9}{2}\right).$$

- b) $\begin{cases} \sqrt{7x+y} - \sqrt{2x+y} = 4 \\ 2\sqrt{2x+y} - \sqrt{5x+8} = 2 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left(\frac{56}{5}; \frac{13}{5}\right)$.
- c) $\begin{cases} (2x-y+2)(2x+y)+6x-3y+6=0 \\ \sqrt{2x+1} + \sqrt{y-1} = 4 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left(\frac{3}{2}; 5\right)$.
- d) $\begin{cases} \sqrt{x+\frac{1}{y}} + \sqrt{x+y-3} = 3 \\ 2x+y+\frac{1}{y} = 8 \end{cases}$ ĐS: $\left\{ (4 \pm \sqrt{10}; 3 \mp \sqrt{10}); (5; -1); (3; 1) \right\}$.
- e) $\begin{cases} x^3y + xy = 5 + x \\ x^2(x^4y^2 - y^2 + 2y) = 5 + x^2 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = (1; 3)$.
- f) $\begin{cases} (x-1)(y-1)(x+y-2) = 6 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(2; 3); (3; 2)\}$.
- g) $\begin{cases} (x^2+x)(y^2+y) = 1 \\ x^2(y^2+1) + 2y(x^2+x+1) = 3 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$.
- h) $\begin{cases} x + \sqrt{y-1} = 6 \\ \sqrt{x^2+2x+y} + 2(x+1)\sqrt{y-1} = 29 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(2; 17); (3; 10)\}$.
- i) $\begin{cases} \left(\frac{2x}{y^2} - 1\right)\left(\frac{y}{x^2} - 9\right) = 18 \\ \sqrt{9x + \frac{y}{x}} + 2\sqrt{y + \frac{2x}{y}} = 4 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right)$.
- j) $\begin{cases} xy + x + y = 3 \\ \frac{1}{x^2+2x} + \frac{1}{y^2+2y} = \frac{2}{3} \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(1; 1); (-3; -3)\}$.
- k) $\begin{cases} \left(\frac{x}{y+1}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+1}\right)^2 = 1 \\ 1 + xy = x^2 + y^2 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \{(1; 0); (0; 1)\}$.
- l) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - \frac{1}{xy} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1 \\ \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy} \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = (1; 1)$.
- m) $\begin{cases} x^4 - 4x^2 + 2y^2 - 6\sqrt{2}.y = -9 \\ \sqrt{2}.x^2y + x^2 + 2\sqrt{2}.y = 22 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left\{ \left(\pm 2; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right); \left(\pm \sqrt{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$.
- n) $\begin{cases} \sqrt{x+y-2} + \frac{2(x-1)}{x+y} = 3 \\ (x+y)\sqrt{x-y+2} = 6\sqrt{x+y-2} \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left\{ (4; 2); \left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right) \right\}$.
- o) $\begin{cases} 5y(xy-1) = 2(y^2+1) \\ 2x(xy-1) = x^2+1 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = (1; 2)$.
- p) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy - y^2 = 1 \\ y(\sqrt{xy-2y^2} + \sqrt{4y^2-xy}) = 1 \end{cases}$ ĐS: $(x; y) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

IV. Sử dụng phương pháp đánh giá giải hệ phương trình đại số – vô tỷ

1. Sử dụng phương pháp hàm số

VD 306. Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} (\sqrt{x^2+1+x})(\sqrt{y^2+1+y})=1 \\ \sqrt{9x^2+\frac{4}{y^2}}=\frac{3x^2+2x-2}{y} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y)=\left(\frac{1\pm\sqrt{7}}{3};\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}\right).$$

b)
$$\begin{cases} 8x^3+2y=\sqrt{y+5x+2} \\ (3x+\sqrt{1+9x^2})(y+\sqrt{1+y^2})=1 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y)=(1;-3).$$

c)
$$\begin{cases} x^3-3x^2+6x-4=y^3+3y \\ \sqrt{x-3}+\sqrt{y+1}=3 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y)=(4;3).$$

d)
$$\begin{cases} x^3+y^3=3x^2-6x-3y+4 \\ x^2+y^2-6x+y-10=\sqrt{y+5}-\sqrt{4x+y} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y)=(5;-4).$$

e)
$$\begin{cases} x^3-3x^2+2=\sqrt{y^3+3y^2} \\ 3\sqrt{x-2}=\sqrt{y^2+8y} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y)=(3;1).$$

f)
$$\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x=2 \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+2=0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y)=(0;1).$$

g)
$$\begin{cases} x^3-y^3+3x^2+6x-3y+4=0 \\ 2\sqrt{4-x^2}-3\sqrt{3+2y-y^2}-3x+2=0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y)=(0;1).$$

h)
$$\begin{cases} x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y \\ x^2+y^2-x+y=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{(A - 2012) } \quad \text{ĐS: } (x;y)=\left\{\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right);\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

i)
$$\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x-2=0 \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+2=0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y)=(0;1).$$

VD 307. Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} (2x+2)\sqrt{2x-1}=y^3+3y \\ y^2-xy+5=5x-6y \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y)=(2+\sqrt{2};1+\sqrt{2}).$$

b)
$$\begin{cases} \sqrt{2x-x^2}=2\sqrt{1-y^2}+2x-1 \\ x^3-3x^2+2+(y^2+2)\sqrt{1-y^2}=0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y)=\{(1;1);(1;-1)\}.$$

c)
$$\begin{cases} (4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 \\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 \end{cases} \quad \text{(A - 2010) } \quad \text{ĐS: } (x;y)=\left(\frac{1}{2};7\right).$$

d)
$$\begin{cases} 2y^3+12y^2+25y+18=(2x+9)\sqrt{x+4} \\ \sqrt{3x+1}+3x^2-14x-8=\sqrt{6-4y-y^2} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y)=(5;1).$$

e)
$$\begin{cases} x^3+5x+(x^2-2y+6)\sqrt{x^3-2y+1}=0 \\ 8x^3-4x^2-3x=3y-\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y)=\left(1;\frac{1}{2}\right).$$

f)
$$\begin{cases} 2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{9-4y^2}=2x^2+6y^2-7 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y)=(1-\sqrt{2};\pm\sqrt[4]{2}).$$

g)
$$\begin{cases} (x+1)\sqrt{x+2} + 3\sqrt{x+2} = y^3 + 3y^2 + 5y + 3 \\ x^3 + 2x^2 + x - 7y^2 - 14y + 19 = 3\sqrt[3]{9(y+1)^2} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (1; \sqrt{3} - 1).$$

h)
$$\begin{cases} (23 - 3x)\sqrt{7-x} = (20 - 3y)\sqrt{6-y} \\ \sqrt{2x+y+2} - \sqrt{-3x+2y+8} = -3x^2 + 14x + 8 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (5; 4).$$

i)
$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 = 5 - 2y \\ (15 - 2x)\sqrt{6-x} - (4y+9)\sqrt{2y+3} = 0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ (1; 1)(-1; 2); \left(-2; \frac{5}{2}\right) \right\}.$$

j)
$$\begin{cases} (53 - 5x)\sqrt{10-x} + (5y - 48)\sqrt{9-y} = 0 \\ \sqrt{2x-y+6} + x^2 - 2x - 66 = \sqrt{y-2x+11} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (9; 8).$$

k)
$$\begin{cases} (4x+2)(1+\sqrt{x^2+x+1}) + 3y(2+\sqrt{9y^2+3}) = 0 \\ 4x^3 - 3y + 5 + 3\sqrt{1-3y} = 0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(-1; \frac{1}{3}\right).$$

l)
$$\begin{cases} (18x+9)\sqrt{x^2+x+1} = y\sqrt{4y^2+27} \\ (2y+3)^2 = 24\sqrt{x}(2y-9) \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(7 \pm 4\sqrt{3}; \frac{45 \pm 24\sqrt{3}}{2}\right).$$

VD 308. Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} y^3 = 2(\sqrt{2x^3} + \sqrt{2x-y}) \\ y(y-x-2) = 3-3x \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ \left(\frac{9}{2}; 3\right), (2+\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}) \right\}.$$

b)
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-3} + x - y = 2 \\ x^2 - y^2 + 1 = 2(\sqrt{y} - \sqrt{x+1} - x) \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (3; 4).$$

c)
$$\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} + 3\sqrt{y} - 7\sqrt{x} = 4 \\ (2\sqrt{y}-1)^2 - y\sqrt{xy} = (2\sqrt{x}-1)^2 - x\sqrt{xy} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \{(0; 1); (1; 9)\}.$$

d)
$$\begin{cases} 2\sqrt{y+1} - \sqrt{2(x+y)} = x - y - 2 \\ 3\sqrt{3y-2x+6} - \sqrt{y^2-3} = x+1 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (4; 2).$$

e)
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - \sqrt{y^4+2} = y \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{(A - 2013) ĐS: } (x; y) = \{(1; 0); (2; 1)\}.$$

f)
$$\begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt[4]{x-2} - \sqrt[4]{y^4+5} = y \\ x^2 + 2x(y-2) + y^2 - 8y + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \{(2; 0); (3; 1)\}.$$

g)
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2x - 4y + 3 \\ 3x^2 - 2x - 5 + 2x\sqrt{x^2+1} = 2(y+1)\sqrt{y^2+2y+2} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ (-1; -2); \left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right) \right\}.$$

h)
$$\begin{cases} x = (y^2 - 1)(y + 2) + 1 \\ xy(xy - 1)^2 + x^2y^2 = (x + 1)(x^2 + x + 1) \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (-1; 0); \left(\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}; \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}\right).$$

i)
$$\begin{cases} x^3 - 8y^3 - 3x^2 + 12y^2 + 6x - 12y = \sqrt{2y-1} - \sqrt{x-1} \\ (2xy+1)\sqrt{2x} = 6y\sqrt{x^2+4y+1} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2}; 3+2\sqrt{2}\right).$$

VD 309. Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = y^6 + y^4 \\ \sqrt{3x+1} + \sqrt{y^2+3} = 4 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \{(1; 1); (33; -\sqrt{33}); (33; \sqrt{33})\}.$$

b)
$$\begin{cases} 2x^2y + y^3 = x^6 + 2x^4 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \{(\sqrt{3}; 3); (-\sqrt{3}; 3)\}.$$

$$c) \begin{cases} x^{11} + xy^{10} = y^{22} + y^{12} \\ 7y^4 + 13x + 8 = 2y^4 \sqrt[3]{x(3x^2 + 3y^2 - 1)} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(\frac{16}{\sqrt{89} - 5}; \pm \frac{\sqrt{5 + \sqrt{89}}}{2} \right).$$

$$d) \begin{cases} y^3(3x^2 - 4x - 23) + 8y = 8 \\ y^2(x^3 + 10x + 27) - 6y = 8 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(2; \frac{2}{3} \right).$$

$$e) \begin{cases} x^2(1 + 4x) = \sqrt{y} \left(\frac{x + y}{2} \right) \\ 3\sqrt{2x - 1} + x\sqrt{5 - y} = y \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ (1; 4); \left(\frac{1}{2}; 1 \right) \right\}.$$

$$f) \begin{cases} y^3(4x^2 + 1) + 2(y^2 + 1)\sqrt{y} = 6 \\ y^2x(2 + 2\sqrt{4x^2 + 1}) = y + \sqrt{y^2 + 1} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(\frac{1}{2}; 1 \right).$$

$$g) \begin{cases} x\sqrt{x^2 + y} + y = \sqrt{x^4 + x^3} + x \\ x + \sqrt{x} + \sqrt{x - 1} + \sqrt{y(x - 1)} = 4,5 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(\frac{25}{16}; \frac{25}{16} \right).$$

$$h) \begin{cases} 4\sqrt{1 + 2x^2y} - 1 = 3x + 2\sqrt{1 - 2x^2y} + \sqrt{1 - x^2} \\ 2x^3y - x^2 = \sqrt{x^4 + x^2} - 2x^3y\sqrt{4y^2 + 1} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ \left(-\frac{3}{5}; -\frac{5}{6} \right); (0; y), \forall y \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$i) \begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2 - y)\sqrt{3 - 2y} \\ \sqrt{x + 2} = \sqrt[3]{14 - x\sqrt{3 - 2y}} + 1 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(7; \frac{111}{98} \right).$$

$$j) \begin{cases} x + \frac{x^3}{x + 1} = (y + 2)\sqrt{(x + 1)(y + 1)} \\ x\sqrt{y + 1} - 2x + \sqrt{x + 1} = 0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; 0 \right).$$

$$k) \begin{cases} 2x^2 + 3 = (4x^2 - 2yx^2)\sqrt{3 - 2y} + \frac{4x^2 + 1}{x} \\ \sqrt{2 - \sqrt{3 - 2y}} = \frac{\sqrt[3]{2x^2 + x^3 + x + 2}}{2x + 1} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{4} \right).$$

$$l) \begin{cases} \sqrt{2(x - y) + 2} \cdot \left[1 + \frac{3}{2(x - y)} \right] = x^2 + 2xy + y^2 - 4 \\ 3x^2 + 3y^2 + 5 = 10xy \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \{(-1; -2); (2; 1)\}.$$

VD 310. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} x + 3y + 1 = y^2 - \frac{1}{y} + \frac{3x + 4}{\sqrt{x + 1}} \\ \sqrt{9y - 2} + \sqrt[3]{7x + 2y + 2} = 2y + 3 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \{(8; 3); (3; 2)\}.$$

$$b) \begin{cases} \frac{2 + 2\sqrt{4y^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \frac{1}{y(x - 1)^2} \\ 4y\sqrt{x - 1} - x^2 - 4y^2 + 3x - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(2; \frac{1}{2} \right).$$

$$c) \begin{cases} 2y^2 - 9y - \frac{4}{x} + 2 = 0 \\ 4\sqrt{x + 1} + xy\sqrt{y^2 + 4} = 0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ \left(-\frac{1}{2}; 2 \right); \left(-\frac{4}{5}; 1 \right) \right\}.$$

$$d) \begin{cases} 2(x - 2)\sqrt{x + 6} = 6 - y \\ (x - 2)\sqrt{y + 2} = \sqrt{x^2 - 4x + 5}\sqrt{y + 1} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (3; 0).$$

e)
$$\begin{cases} \frac{2x+1}{2y} = \sqrt{\frac{x^2+x+1}{y^2+3}} \\ \sqrt{3x-5} + 2\sqrt{\frac{19}{2}(y-1)} - 30 = \frac{1}{2}(y-1)^2 - 7x + 11 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \{(2; 5); (3; 7)\}.$$

f)
$$\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} + 2\sqrt{7x+12y+8} = \frac{2}{5}(8y-y^2) + y + 5 \\ (2x-1)\sqrt{x+y} = (6-x-y)\sqrt{2-x} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \{(0; 0); (1; 1)\}.$$

g)
$$\begin{cases} (x+y)\sqrt{x^2-4x+5} + (x-2)\sqrt{x^2+2xy+y^2+1} = 0 \\ x-y(x^2-y^2) = 2(1-x^2+y^2) \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ (2; 2); \left(\frac{2 \pm \sqrt{10}}{6}; \frac{4 \mp \sqrt{10}}{3} \right) \right\}.$$

VD 311. Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 3y + \sqrt{y^2 + 4} \\ x^2 - y^2 - 3x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right); \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4} \right) \right\}.$$

b)
$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 5 + 2x\sqrt{x^2 + 1} = 2(y+1)\sqrt{y^2 + 2y + 2} \\ x^2 + 2y^2 = 2x - 4y + 3 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ (-1; -2); \left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3} \right) \right\}.$$

c)
$$\begin{cases} y^3 + 3y^2 + y + 4x^2 - 22x + 21 = (2x+1)\sqrt{2x-1} \\ 2x^2 - 11x + 9 = 2y \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \{(1; 0); (5; 2)\}.$$

d)
$$\begin{cases} 16\sqrt{3y+4} = 85 - 2x \\ 16(x^3 - y) + 6x(3 - 4x) = 6\sqrt[3]{y+1} + 21 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(\frac{5}{2}; 7 \right).$$

e)
$$\begin{cases} \left(\sqrt{8y^2 + 24y + 18} + 2\sqrt{2} + 2y\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \right) \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{2}} - x \right) = 2 \\ x^2 - 2y - 6 = \sqrt{8y - 17} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(1 \pm \sqrt{5}; -1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \right).$$

f)
$$\begin{cases} xy + 2 = y\sqrt{x^2 + 2} \\ y^2 + 2(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 2x^2 - 4x \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(-\frac{1}{2}; 1 \right).$$

g)
$$\begin{cases} (\sqrt{x^2 + 1} - 3x^2y + 2)(\sqrt{4y^2 + 1} + 1) = 8x^2y^3 \\ x^2y - x + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(4; \frac{1}{8} \right).$$

2. Sử dụng phương pháp bất đẳng thức

VD 312. Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} 2x^2\sqrt{xy} + x^3 + y^3 = 4x^2y \\ y + \sqrt{x} = \sqrt{-2x^2 + 14y - 9} \end{cases} \quad \text{ĐS: } x = y = \frac{19 + \sqrt{37}}{18}; x = y = \frac{7 - \sqrt{13}}{2}.$$

b)
$$\begin{cases} x\sqrt{2-y^2} + y\sqrt{2-x^2} = 2 \\ 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ (1; 1); \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right) \right\}.$$

c)
$$\begin{cases} 4x^4 - 8x^2y + 4y^3 + \sqrt{2} - 1 = 0 \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

d)
$$\begin{cases} \sqrt{(12-y)x^2} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 \\ \sqrt{3x-5} + 2\sqrt[3]{19x-30} = 35 - 2y - 7x \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x; y) = (3; 3).$$

e)
$$\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 \\ x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{y-2} \end{cases} \quad \text{(A - 2014) ĐS: } (x; y) = (3; 3).$$

$$f) \begin{cases} \sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + 2xy + 5y^2} = 3(x+y) \\ \sqrt{2x+y+1} + 2\sqrt[3]{7x+12y+8} = 2xy+y+5 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = \{(0;0);(1;1)\}.$$

$$g) \begin{cases} \sqrt{x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{y^2 + xy + 2x^2} = 2(x+y) \\ (8y-6)\sqrt{x-1} = (2+\sqrt{x-2})(y+4\sqrt{y-2}+3) \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = \left\{ (2;2); \left(\frac{22}{9}; \frac{22}{9} \right) \right\}.$$

$$h) \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}} = x+y \\ x\sqrt{2xy+5x+3} = 4xy-5x-3 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (3;3).$$

$$i) \begin{cases} \sqrt{\frac{4x^2 + y^2}{2}} + \sqrt{\frac{4x^2 + 2xy + y^2}{3}} = 2x+y \\ 5\sqrt{x+1} - 2\sqrt[3]{7x+6} = 4 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (3;6).$$

$$j) \begin{cases} \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} = \frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1} \\ \sqrt{3x-5} + 2\sqrt[3]{19x-30} = 2x^2 - 7x + 11 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = \{(2;2);(3;3)\}.$$

$$k) \begin{cases} y^3 + 5x^2 + 6x = (x+2)(\sqrt{2y+2} + \sqrt{5-x}) \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \left(\frac{1}{\sqrt{x+3y}} + \frac{1}{\sqrt{3x+y}} \right) = 2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (1;1).$$

$$l) \begin{cases} xy + 6y\sqrt{x-1} + 12y = 4 \\ \frac{xy}{1+y} + \frac{1}{xy+y} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = \left(10; \frac{1}{10} \right).$$

$$m) \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9} \end{cases} \quad \text{(VMO - 09) ĐS: } (x;y) = \left(\frac{9 \pm \sqrt{73}}{36}; \frac{9 \pm \sqrt{73}}{36} \right).$$

$$n) \begin{cases} (x+7y)\sqrt{x} + (y+7x)\sqrt{y} = 8\sqrt{2xy(x+y)} \\ 2(1-y)\sqrt{x^2+2x-1} = y^2 - 2x - 1 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (\sqrt{6}-1; \sqrt{6}-1).$$

$$o) \begin{cases} (x+1)\sqrt{x+2} + 3\sqrt{x+2} = y^3 + 3y^2 + 5y + 3 \\ x^3 + 2x^2 + x - 7y^2 - 14y + 19 = 3\sqrt[3]{9(y+1)^2} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (1; \sqrt{3}-1).$$

$$p) \begin{cases} 2y^3 - (x+4)y^2 + 8y + x^2 - 4x = 0 \\ \sqrt{\frac{1-x}{2}} + \sqrt{x+2y+3} = 4(x-1)^2 + 8y - \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4} \right).$$

VD 313. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} \sqrt{9 - (1 - x^2y)^2} = x^4 + y^4 + 1 \\ \sqrt{4 + (x - y)^2} = 2x^3y^2 + x^4 - x^6 \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = (1;1).$$

$$b) \begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x \end{cases} \quad \text{ĐS: } (x;y) = \{(0;0);(1;1)\}.$$

- c)
$$\begin{cases} \left(x + \frac{y}{x}\right)\left(xy + \frac{1}{x}\right) = 4y \\ (x-1)^2\sqrt{y} + x(y-1) = 0 \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = (1; 1)$.
- d)
$$\begin{cases} (x-1)\sqrt{y} + (y-1)\sqrt{x} = \sqrt{2xy} \\ x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = (2; 2)$.
- e)
$$\begin{cases} \frac{x^2}{(y+1)^2} + \frac{y^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \\ x + y + 1 = 3xy \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = \left\{ (1; 1); \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right) \right\}$.
- f)
$$\begin{cases} x^2 + 2x - 2 = \sqrt{-y^2 - 4y - 2} \\ 6x - y - 11 + \sqrt{10 - 4x - 2x^2} = 0 \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = (1; -3)$.
- g)
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+y^2+y+3} - 3\sqrt{y} = \sqrt{x+2} \\ y^3 + y^2 - 3y - 5 = 3x - \sqrt[3]{x+2} \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = (-1; 1)$.
- h)
$$\begin{cases} \sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} = 1 + y^2 \\ x + \frac{1}{x} = 2(2-y) \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = (1; 1)$.
- i)
$$\begin{cases} \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} - y^2 = 2\sqrt{2} \\ \sqrt[4]{2x} + 2\sqrt{6-x} + 2\sqrt{2}y = 8 + \sqrt{2} \end{cases}$$
 ĐS: $(x; y) = (2; \sqrt{2})$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN TỔNG HỢP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

BT 448. Giải các hệ phương trình sau:

- a)
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + x + y = 0 \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 + 49 = 0 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 2y + x = 2 \\ 2x^2 - y^2 - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$
- d)
$$\begin{cases} 2x^2y + 3xy = 4x^2 + 9y \\ 7y + 6 = 2x^2 + 9x \end{cases}$$
- e)
$$\begin{cases} 8(x^3 - 1) + 6xy^2 = y(12x^2 + y^2) \\ (x^2 + y - 4x)(x^2 + y^2 - 2x - 5) = 14 \end{cases}$$
- f)
$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{x-y-1} = 1 \\ y^2 + x + 2y\sqrt{x} - y^2x = 0 \end{cases}$$
- g)
$$\begin{cases} \sqrt{x+2y} - \sqrt{x-2y} = 2 \\ \sqrt[3]{x+3} + \sqrt{x^2-4y^2} = 5 \end{cases}$$
- h)
$$\begin{cases} \sqrt{7x+y} - \sqrt{2x+y} = 4 \\ 2\sqrt{2x+y} - \sqrt{5x+8} = 2 \end{cases}$$
- i)
$$\begin{cases} x(x+y+1) - 3 = 0 \\ (x+y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$$
- j)
$$\begin{cases} 16x^3y^3 - 9y^3 = (2xy - y)(4xy^2 + 3) \\ 4x^2y^2 - 2xy^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$
- k)
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases}$$
- l)
$$\begin{cases} x^3 - 2y^3 = x + 4y \\ 13x^2 - 41xy + 21y^2 = -9 \end{cases}$$
- m)
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = xy + 2y \\ 2x^3 + 3xy^2 = 2y^2 + 3x^2y \end{cases}$$
- n)
$$\begin{cases} x^3 - xy^2 + y^3 = 1 \\ 4x^4 - y^4 = 4x - y \end{cases}$$

BT 449. Giải các hệ phương trình sau:

- a)
$$\begin{cases} 2y^2 + xy - x^2 = 0 \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3xy + x - y = 0 \\ x^2 - 3y + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x^3 + 2x^2y - xy = y^2 - x - y \\ 2x^3 - xy + x^2 = 4 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 1 + \sqrt{x^2 - y^2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 2x^2 - 8xy^2 - xy + 4y^3 = 0 \\ 16x^3 + 2x - 8y^2 + 5 = 0 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x^3 - 3x^2 + x + 3y = xy + 3 \\ 2y^2 - 3xy - 9x^2 + 3x = y \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} y^2 + (y-3)x - 4y = -3 \\ \sqrt[3]{x-2} + \sqrt{2-y} = 3 \end{cases}$$

$$m) \begin{cases} y^2 - x\sqrt{\frac{y^2+2}{x}} = 2x-2 \\ \sqrt{y^2+1} + \sqrt[3]{2x-1} = 1 \end{cases}$$

$$o) \begin{cases} 2\sqrt{xy-y} + x + y = 5 \\ \sqrt{5-x} + \sqrt{1-y} = 1 \end{cases}$$

$$q) \begin{cases} x - 2y - \sqrt{xy} = 0 \\ \sqrt{x-1} - \sqrt{2y-1} = 1 \end{cases}$$

$$s) \begin{cases} 9x^4 + 24y^3 - xy^2 + 7y^2 = 16 - x + 24y \\ 8y^3 + 9y^2 + 20y - \sqrt[3]{6y+1} + 15 = x \end{cases}$$

$$u) \begin{cases} \frac{6x}{y} - 2 = \sqrt{3x-y} + 3y \\ 2\sqrt{3x} + \sqrt{3x-y} = 6x + 3y - 4 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 - 2y^2 + xy + x - y = 0 \\ x^3 - y^3 + 2x^2y + y^2 = -1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 4x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y = 2 \\ 8\sqrt{1-2x} + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 5x - y - 2 \\ x^2 + y^2 + x + y = 4 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} x^2 + 5x - xy = 3y - 6 \\ 4x^2y - 3xy + 2y^2 = 9 \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} x^3 + 2y^2 + y = x^2y + 2xy + x \\ 5\sqrt{x^2 - 2y - 2} + \sqrt[3]{y^2 - 2x - 4} = 4 \end{cases}$$

$$n) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \sqrt{y-1}(x+y-1) = (y-2)\sqrt{x+y} \end{cases}$$

$$p) \begin{cases} x^3 + 2y^2 = x^2y + 2xy \\ 2\sqrt{x^2 - 2y - 1} + \sqrt[3]{y^3 - 14} = x - 2 \end{cases}$$

$$r) \begin{cases} x^3 - 3x^2y - 4x^2 + 4y^3 + 16xy - 16y^2 = 0 \\ \sqrt{x-2y} + \sqrt{x+y} = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$t) \begin{cases} x^3 + y^3 + 6xy = 8 \\ x^2 + y^2 = 2x + y + 14 \end{cases}$$

$$v) \begin{cases} 12\frac{y}{x} = 3 + x - 2\sqrt{4y-x} \\ \sqrt{y+3} + y = x^2 - x - 3 \end{cases}$$

BT 450. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 9 \\ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1 \right) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{y}} + 1 \right) = 18 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{13}{2} \\ 3y^2x + x^3 = \frac{35}{2} \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3xy + 3 = 0 \\ \frac{x-y+18}{(x+y)^2} = 9\sqrt{x-y} \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{xy} \right)^2 = 8 \\ (x^3 + y^3) \left(1 + \frac{1}{xy} \right)^3 = 16 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 4(x^2 + xy + y^2) + \frac{3}{(x+y)^2} = \frac{85}{3} \\ 2x + \frac{1}{x+y} = \frac{13}{3} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 + y^2 + 6xy - \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{9}{8} = 0 \\ 2y - \frac{1}{x-y} + \frac{5}{4} = 0 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} (x+y) \left(1 + \frac{1}{xy} \right) = 4 \\ \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} = 1 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} xy + \frac{1}{xy} = 2 \\ (x+y) \left(1 + \frac{1}{xy} \right) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{i)} \begin{cases} x^3(3y-2) = -8 \\ x(y^3+2) = -6 \end{cases} & \text{j)} \begin{cases} (x-y)^2(3x^2+2xy+3y^2-20) + 1 = 0 \\ 2x^2 - 5x - 2xy + 5y = 0 \end{cases} \\
 \text{k)} \begin{cases} x^4 - y^4 = \frac{3}{4y} - \frac{1}{2x} \\ (x^2 - y^2)^5 + 5 = 0 \end{cases} & \text{l)} \begin{cases} (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{x^2 y^2}\right) = 16 \\ y(x^2 + 1) = 2x(y^2 + 1) \end{cases} \\
 \text{m)} \begin{cases} 2x^2 y + y^2 x + 2y + x = 6xy \\ xy + \frac{1}{xy} + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 4 \end{cases} & \text{n)} \begin{cases} x(x+y+1) - 3 = 0 \\ (x+y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases} \\
 \text{o)} \begin{cases} (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^2 = \frac{45}{4} \\ (x+y) \left(1 + \frac{1}{xy}\right) = \frac{9}{2} \end{cases} & \text{p)} \begin{cases} x^2 + 1 + y^2 + xy = 4y \\ x + y - 2 = \frac{y}{1+x^2} \end{cases} \\
 \text{q)} \begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y \\ (x^2 + 1)(y+x-2) = y \end{cases} & \text{r)} \begin{cases} x^3 y^3 + 8 = 16y^3 \\ x(xy+2) = 8y^2 \end{cases} \\
 \text{t)} \begin{cases} (x^4 - 2x^3 + x^2)(1+y^2-2y) = 16y \\ 2x^2 y - 2xy + y^2 - 10y + 1 = 0 \end{cases} & \text{v)} \begin{cases} (x+1)^2 (y+1)^2 = -9xy \\ (x^2 + 1)(y^2 + 1) = -10xy \end{cases} \\
 \text{x)} \begin{cases} 27x^3 y^3 - 9y^3 = -125 \\ 45x^2 y - 6y^2 + 75x = 0 \end{cases} & \text{y)} \begin{cases} x^2 + xy - 3x + y = 0 \\ x^4 + 3x^2 y - 5x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \\
 \text{z)} \begin{cases} y^2 + 4xy + y - 2x = 0 \\ y^4 + 8xy^2 + 4x^2 + 3y^2 = 0 \end{cases} & \text{w)} \begin{cases} \sqrt{3x+y} + \sqrt{x+y} = 2 \\ \sqrt{x+y} + x - y = 1 \end{cases}
 \end{array}$$

BT 451. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5 \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 2 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \sqrt{11x-y} - \sqrt{y-x} = 1 \\ 7\sqrt{y-x} + 6y - 26x = 3 \end{cases} \\
 \text{c)} \begin{cases} \sqrt[3]{2x-y} + \sqrt[3]{3x-2y} = 2 \\ 2\sqrt[3]{3x-2y} + 5x + y = 8 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2\sqrt{2x-3y} + \sqrt{5-x+y} = 7 \\ 3\sqrt{5-x+y} - \sqrt{2x-y-3} = 1 \end{cases} \\
 \text{e)} \begin{cases} x^3 y(1+y) + x^2 y^2(2+y) + xy^3 = 30 \\ x^2 y + x(1+y+y^2) + y - 11 = 0 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} \sqrt{2x} + \sqrt{2y} = 6 \\ \sqrt{2x+5} + \sqrt{2y+9} = 8 \end{cases} \\
 \text{g)} \begin{cases} (xy+3)^2 + (x+y)^2 = 8 \\ \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} = -\frac{1}{4} \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} x^4 + 2x^3 - 5x^2 + y^2 - 6x = 11 \\ \frac{3\sqrt{y^2-7}-6}{\sqrt{y^2-7}} = x^2 + x \end{cases} \\
 \text{i)} \begin{cases} \sqrt{8x^2 - 8xy + 2x + 2y^2 - 2} = \sqrt{x-1} + 2x - y \\ 4x\sqrt{x-1} = 17 - y^2 \end{cases} & \text{j)} \begin{cases} x^2 y + x^2 + 2y - 22 = 0 \\ x^4 - 4x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0 \end{cases} \\
 \text{k)} \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = \frac{8}{y^3} - \frac{8}{y} \\ y^2 + 4 = 5y^2(x^2 + 2x + 2) \end{cases} & \text{l)} \begin{cases} (2x-1)\sqrt{x+y} = (6-x-y)\sqrt{2-x} \\ 2\sqrt[3]{12x^2 + 3xy - 18x} = x^3 - 6x - y + 5 \end{cases} \\
 \text{m)} \begin{cases} x^2 y + xy + 2x - 12y - 24 = 0 \\ x^3 - y^3 = 2(x^2 + y^2 + xy) + 3(x-y-2) \end{cases} & \text{n)} \begin{cases} (x-y)^2 = 1 - x^2 y^2 \\ x(xy+y+1) = y(xy+1) + 1 \end{cases}
 \end{array}$$

$$o) \begin{cases} xy - x - y = 1 \\ 4x^3 - 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 7 \end{cases}$$

$$q) \begin{cases} x^2 + x^3y - xy^2 + xy - y = 1 \\ x^4 + y^2 - xy(2x - 1) = 1 \end{cases}$$

$$p) \begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{y} \left(1 + \frac{1}{y}\right) = 4 \\ \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y} + \frac{1}{y^3} = 4 - x^3 \end{cases}$$

$$r) \begin{cases} \frac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \frac{2y}{x} = 1 \\ x^2 + y^2 - \frac{2x}{y} = 4 \end{cases}$$

$$s) \begin{cases} \sqrt{2x-1} - y(1 + 2\sqrt{2x-1}) = -8 \\ y^2 + y\sqrt{2x-1} + 2x = 13 \end{cases}$$

$$t) \begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 + 3(x - y) = 5 \\ (x+1)(y-1)(x-y+2) = 2 \end{cases}$$

$$u) \begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 12 \\ y\sqrt{x^2 - y^2} = 12 \end{cases}$$

$$v) \begin{cases} 12x + 3y - 4\sqrt{xy} = 16 \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y+5} = 6 \end{cases}$$

$$x) \begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1+2x) = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$y) \begin{cases} \left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^3 + xy + \frac{3}{2} = y^3 \\ (xy+2)^2 + \frac{1}{x^2} = 2y + \frac{4}{x} \end{cases}$$

$$z) \begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 25 \\ x^2 + 6xy + y^2 = 10x + 6y - 1 \end{cases}$$

$$w) \begin{cases} \sqrt{46 - 2y(3 + 8x + 8y)} = 2x + 6 \\ 2\sqrt{4x+y} + x + 2y = 1 \end{cases}$$

BT 452. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} y^2 \sqrt{1 + \frac{3x}{y}} = 2x^2 + y^2 - 4x \\ (x-2) \sqrt{1 + \frac{3x}{y}} = 2x - y \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{7}{12} \\ \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{35}{12} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{2y^3}{x^4} - \frac{y^3}{x^3 + 5y^6} = \frac{9}{10x^2} \\ \sqrt{x^3 + y^6} \left(\frac{x^4}{x^3 + 5y^6} + 2\right) = \frac{22x^2}{5} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{6}{x+y} + \frac{1}{xy} = 1 \\ \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} = 2\sqrt{7} \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \frac{3x-y}{x^2-y^2} + 3x + y = 9 \\ (x^2 + y^2) \left[\frac{5}{(x^2 - y^2)^2} + 5 \right] + 2xy - \frac{2xy}{(x^2 - y^2)^2} = 35 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} (x+y) \left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{x^2y^2}\right) = 49 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} \sqrt[3]{2x^2 + 8y} = \frac{7-4y}{x^2+x} \\ \sqrt{x^3 - y} = \frac{2y}{x(4x-1)} \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1 \\ \sqrt{x^2-1} + \sqrt{y^2-1} = \sqrt{xy+2} \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} (2x^2 + y)[4x^4 - 3x^2 + y(4x^2 + y + 6)] = 8 \\ 3y - 4x^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} 2y + \sqrt{2y-x+1} = 4xy^2 + x - 1 \\ x^3 - 6x^2y = 8y^3 - 6 \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} \sqrt{x+2y+3} + \sqrt{9x+10y+11} = 10 \\ \sqrt{12x+13y+14} + \sqrt{28x+29y+30} = 20 \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} 2y^2 + 1 = x - y \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-2y} = 3y \end{cases}$$

$$m) \begin{cases} 2x^2 + y^2 + xy = 1 \\ (x-y)^2 \left(\sqrt{3x^2 - xy + 2y^2} + 2\right) = 3 \end{cases}$$

$$n) \begin{cases} 2x - 2\sqrt{y+2} = 3 \\ 4y + 8(x-2)\sqrt{x+2} + 7 = 0 \end{cases}$$

BT 453. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{cases} (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1 \\ x\sqrt{6x-2xy+1} = 4xy+6x+1 \end{cases} & \text{b)} & \begin{cases} (x + \sqrt{x^2+4})(y + \sqrt{y^2+1}) = 2 \\ 12y^2 - 10y + 2 = 2\sqrt[3]{x^3+1} \end{cases} \\ \text{c)} & \begin{cases} (x-3)(x+4) = y(y-7) \\ \frac{y^2}{\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{2-y}} \end{cases} & \text{d)} & \begin{cases} y^2 + 2y(x+1) + x^2 - 2x + 1 = 0 \\ \sqrt[4]{y+1} - \sqrt{x^4+1} + \sqrt{y+2} = x \end{cases} \\ \text{e)} & \begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y-y^2} = 0 \end{cases} & \text{f)} & \begin{cases} y^3 + 3y = x^3 + 3x^2 + 6x + 4 \\ \sqrt{1-x^2} - \sqrt{y} = \sqrt{2-y} - 1 \end{cases} \\ \text{g)} & \begin{cases} 4x^3 - 3x + (y-1)\sqrt{2y+1} = 0 \\ 2x^2 + x + \sqrt{-y(2y+1)} = 0 \end{cases} & \text{h)} & \begin{cases} (8x-3)\sqrt{2x-1} - y - 4y^3 = 0 \\ 4x^2 - 8x + 2y^3 + y^2 = 2y - 3 \end{cases} \\ \text{i)} & \begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0 \\ \sqrt[3]{x+2} + 2\sqrt{y+2} = 5 \end{cases} & \text{j)} & \begin{cases} 2(2x+1)^3 + 2x+1 = (2y-3)\sqrt{y-2} \\ \sqrt{4x+2} + \sqrt{2y+4} = 6 \end{cases} \\ \text{k)} & \begin{cases} 8y^3 + 6y + 1 + \sqrt{3x^2+16y^2} = 19 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} & \text{l)} & \begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{2y^2+1} - y = 2-x \end{cases} \\ \text{m)} & \begin{cases} (23-3x)\sqrt{7-x} + (3y-20)\sqrt{6-y} = 0 \\ \sqrt{2x+y+2} - \sqrt{8-3x+2y} + 3x^2 = 14x+8 \end{cases} & \text{n)} & \begin{cases} x^6 - y^3 + x^2 - 9y^2 - 30 = 28y \\ \sqrt{2x+3} + x = y \end{cases} \\ \text{o)} & \begin{cases} 4x\sqrt{8x-4} - 12y^2 - 5 = 4y^3 + 13y + \sqrt{18x-9} \\ 4x^2 - 8x + 4\sqrt{2x-1} + 2y^3 + 7y^2 + 2y = 0 \end{cases} & \text{p)} & \begin{cases} x^3 - x^2y = x^2 - x + y + 1 \\ x^3 - 9y^2 + 6(x-3y) - 15 = \sqrt[3]{6x^2+2} \end{cases} \\ \text{q)} & \begin{cases} (2102-3x)\sqrt{4-x} + (6y-2009)\sqrt{3-2y} = 0 \\ 2\sqrt{7x-8y} + 3\sqrt{14x-18y} = x^2 + 6x + 13 \end{cases} & \text{r)} & \begin{cases} 2y^3 + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} - y \\ y+1 = 2x^2 + 2xy\sqrt{1+x} \end{cases} \\ \text{s)} & \begin{cases} 3x^2 - 8x + 2(x-1)\sqrt{x^2-2x+2} = 2(y+2)\sqrt{y^2+4y+5} \\ x^2 + 2y^2 = 4x - 8y - 6 \end{cases} \end{aligned}$$

BT 454. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \sqrt{2(x-y)}(1+4xy) = \sqrt{3} \end{cases} & \text{b)} & \begin{cases} x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1 \\ (1-x)(1+y) = 2 \end{cases} \\ \text{c)} & \begin{cases} 4x^3 + 4y^3 = 3x^2y + 2\sqrt{3}xy + 2x \\ x^2 = y^2 + 1 \end{cases} & \text{d)} & \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (3x-4x^3)(3y-4y^3) = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \text{e)} & \begin{cases} x\sqrt{4-y^2} + y\sqrt{4-x^2} = 4 \\ (2-x)(2+y) = 8 \end{cases} & \text{f)} & \begin{cases} x + \sqrt{1-y^2} = 1 \\ y + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{3} \end{cases} \\ \text{g)} & \begin{cases} y + 2x + 2x^3 = 3x^2y \\ x^2 + 1 = y^2 \end{cases} & \text{h)} & \begin{cases} (6-x)(x^2 + y^2) = 6x + 8y \\ (3-y)(x^2 + y^2) = 8x - 6y \end{cases} \\ \text{i)} & \begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3 \\ y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} & \text{j)} & \begin{cases} x + \frac{78y}{x^2+y^2} = 20 \\ y + \frac{78x}{x^2+y^2} = 15 \end{cases} \\ \text{k)} & \begin{cases} 2x + 5y = xy + 2 \\ x^2 + 4y + 21 = y^2 + 10x \end{cases} & \text{l)} & \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -1 \\ y^3 - 3x^2y = -\sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 7. BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

☆☆☆

I. Bài toán chứa tham số trong phương trình vô tỷ

VD 314. Tìm tham số m để phương trình: $m\sqrt{2x^2+9} = x+m$ có đúng một nghiệm ?

Đáp số: $m = \pm \frac{3}{4} \vee -\frac{1}{\sqrt{2}} < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

VD 315. Tìm tham số m để phương trình: $\sqrt{2x^2-2mx+3}+2 = x$ luôn có nghiệm ?

Đáp số: $m \geq \frac{11}{4}$.

VD 316. Tìm tham số m để: $3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{x^3+2x^2+1} = m$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $[-1;1]$?

Đáp số: $m = 1 \vee -4 \leq m < -2\sqrt{2}$.

VD 317. Tìm tham số m để phương trình: $\sqrt{-x^2+4x+21} - \sqrt{-x^2+3x+10} = m$ có hai nghiệm ?

Đáp số: $m \in (\sqrt{2}; 3]$.

VD 318. Tìm tham số m để phương trình: $x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = m(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})$ có nghiệm ?

Đáp số: $2\sqrt{3}(\sqrt{5}-2) \leq m \leq 12$.

VD 319. Tìm tham số m để phương trình: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2-x} = m(4x-1)$ có hai nghiệm thực phân biệt ?

Đáp số: $m = \frac{\sqrt{21}}{14} \vee \frac{\sqrt{7}}{7} < m \leq \frac{\sqrt{21}}{7}$.

VD 320. Tìm m để phương trình: $\sqrt{21+4x-x^2} - \frac{3}{4}x + 3 = m(\sqrt{x+3} + 2\sqrt{7-x})$ có nghiệm thực ?

Đáp số: $m \in \left[-\frac{9\sqrt{10}}{10}; \frac{31\sqrt{2}}{10}\right]$.

VD 321. Tìm tham số m để phương trình sau có nghiệm: $2|x+3| + (2-2m)|x-3| = (m-1)\sqrt{x^2-9}$?

Đáp số: $m \geq 1, m \neq \frac{5}{3}$.

VD 322. Tìm m để phương trình: $\sqrt{x} = \sqrt{-x^2+9x+9m} - \sqrt{9-x}$ có đúng bốn nghiệm thực phân biệt ?

Đáp số: $1 \leq m < \frac{10}{9}$.

VD 323. Tìm m để phương trình: $x - 5x\sqrt{5-x^2} = m - \sqrt{5-x^2} - 7$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt ?

Đáp số: $m \in \left(\sqrt{10} - \frac{11}{2}; \frac{196}{10}\right)$.

VD 324. Tìm m để: $\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{(2x-1)(2x+1)} + m\sqrt{2x+1} = 0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt ?

Đáp số: $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$.

VD 325. Tìm tham số m để: $(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})\left(m\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 16\sqrt[4]{x^2-x}\right) = 1$ có hai nghiệm thực phân biệt ?

Đáp số: $-16 < m < -11$.

VD 326. Tìm tham số m để phương trình: $8x^2 + 4x + 13 = m^2(2x+1)\sqrt{x^2+3}$ có nghiệm ?

Đáp số: $m < -2 \vee m > 2$.

VD 327. Tìm tham số m để phương trình: $x^2 + (m+2)x + 4 = (m-1)\sqrt{x^3 + 4x}$ có nghiệm ?

Đáp số: $m \geq 7$.

VD 328. Tìm tham số m để phương trình: $m\sqrt{x^3 - 1} = x^2 + 2$ có nghiệm thực ?

Đáp số: $m \geq \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}\sqrt{3}-3}$.

VD 329. Tìm tham số m để phương trình: $(2m-1)\sqrt{x+2} + (m-2)\sqrt{2-x} + m - 1 = 0$ có nghiệm ?

Đáp số: $\frac{3}{5} \leq m \leq \frac{5}{3}$.

VD 330. Tìm tham số m để phương trình: $\sqrt{x-m} + \sqrt{1-x} = 3m$ có nghiệm ?

Đáp số: $\frac{\sqrt{37}-1}{18} \leq m \leq \frac{\sqrt{19}-1}{9}$.

VD 331. Tìm tham số m để phương trình: $\sqrt[5]{x^2 - 34x + m} - \sqrt[4]{(x-1)(x-33)} = 1$ có nghiệm ?

Đáp số: $m \geq 34$.

VD 332. Tìm m để phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 2m\sqrt{x(1-x)} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = m^3$ có nghiệm duy nhất ?

Đáp số: $m = -1 \vee m = 0$.

II. Bài toán chứa tham số trong bất phương trình vô tỷ

VD 333. Tìm tham số m để bất phương trình: $mx^4\sqrt{x(\sqrt{1-x}-1)^3} \leq x^3 - 3x - 1$ có nghiệm ?

Đáp số: $m \geq 3$.

VD 334. Tìm tham số m để bất phương trình: $mx - 3 \geq \sqrt{4x - x^2}$ có nghiệm ?

Đáp số: $m \geq \frac{3}{4}$.

VD 335. Tìm m để bất phương trình: $x(4-x) + m\sqrt{x^2 - 4x + 5} + 2 \geq 0$ có nghiệm $\forall x \in [2; 2 + \sqrt{3}]$?

Đáp số: $m \geq -6$.

VD 336. Tìm tham số m để bất phương trình: $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{(1-x)(3+x)} \leq 2m$ có nghiệm ?

Đáp số: $m \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

VD 337. Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}} - m - \sqrt{3+2x-x^2} \leq 2$ có nghiệm thực ?

Đáp số: $m \in [2\sqrt{2} - 16; 2\sqrt{2}]$.

VD 338. Tìm tham số m để bất phương trình: $x^2 + \sqrt{(1-x^2)^3} \geq m$ có nghiệm ?

Đáp số: $m \leq 1$.

VD 339. Tìm tham số m để bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + \sqrt{8 - 2x - x^2} > m$ có nghiệm ?

Đáp số: $m \leq \sqrt{10}$.

VD 340. Tìm tham số m để bất phương trình: $2(x + \sqrt{2-x^2}) - x\sqrt{2-x^2} \geq 3m$ nghiệm đúng ?

Đáp số: $m \leq -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

VD 341. Tìm m để bất phương trình: $x^4 + x^2 + m - 2 \leq 2x\sqrt{x^2 + 1}$ nghiệm đúng $\forall x \in [0; 1]$?

Đáp số: $m \leq -2$.

III. Bài toán chứa tham số trong hệ phương trình

- VD 342.** Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y - xy = 1 \end{cases}$ có nghiệm thực ? ĐS: $m \geq 1$.
- VD 343.** Tìm m để hệ: $\begin{cases} x + xy + y = m + 2 \\ x^2y + y^2x = m + 1 \end{cases}$ có nghiệm thực ? ĐS: $m \leq -\frac{3}{4} \vee m \geq 3$.
- VD 344.** Tìm m để hệ: $\begin{cases} x + xy + y = 2m + 1 \\ xy(x + y) = m^2 + m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất ? ĐS: $m = 1$.
- VD 345.** Tìm m để hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ xy(x + 1)(y + 1) = m \end{cases}$ có ít nhất một nghiệm ? ĐS: $m \in \left[-\frac{33}{16}; 16\right]$.
- VD 346.** Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{y} + \sqrt{x-1} = 2 \\ x^2 + y^2 - 2x = 3m + 2 \end{cases}$ có nghiệm ? ĐS: $-\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{13}{6}$.
- VD 347.** Tìm m để hệ: $\begin{cases} 2x^3 - (y+2)x^2 + xy = m \\ x^2 + x - y = 1 - 2m \end{cases}$ có nghiệm thực ? ĐS: $m \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$.
- VD 348.** Tìm m để hệ $\begin{cases} x^3 + (y+2)x^2 + 2xy = -2m - 3 \\ x^2 + 3x + y = m \end{cases}$ có nghiệm thực ? ĐS: $m \geq -2$.
- VD 349.** Tìm m để hệ: $\begin{cases} x^3 + \frac{1}{y^3} + y^3 + \frac{1}{x^3} = 15m - 10 \\ x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 5 \end{cases}$ có nghiệm ? ĐS: $\left[\frac{7}{4}; 2\right] \cup [22; +\infty)$.
- VD 350.** Tìm m để hệ: $\begin{cases} m(x^2 + \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1) = xy \\ m(\sqrt[3]{x^8} + x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1) + (m-1)\sqrt[3]{x^4} = 2y\sqrt[3]{x^4} \end{cases}$ có nghiệm thực ?
Đáp số: $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup [0; +\infty)$.
- VD 351.** Tìm m để hệ: $\begin{cases} y^3 = x^2 + 4y^2 + my \\ x^3 = y^2 + 4x^2 + mx \end{cases}$ có nghiệm duy nhất ? ĐS: $m > \frac{25}{4}$.
- VD 352.** Tìm m để hệ: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{1-y} = m + 1 \\ \sqrt{y} + \sqrt{1-x} = m + 1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất ? ĐS: $m = \sqrt{2} - 1$.
- VD 353.** Tìm m để hệ: $\begin{cases} \sqrt{3x^2 + x + 1} + \sqrt{3y^2 - y + 1} = m \\ \sqrt{3x^2 - x + 1} + \sqrt{3y^2 + y + 1} = m \end{cases}$ có nghiệm ? ĐS: $m \geq 2$.
- VD 354.** Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2 - 2xy - y^2 = 5 \\ x^2 + xy + 2y^2 = m \end{cases}$ có nghiệm ? ĐS: $m \geq \frac{5}{4}$.
- VD 355.** Tìm m để hệ: $\begin{cases} x^3 - 12x - y^3 + 6y^2 = 16 \\ 5\sqrt{4y - y^2} = 4x^2 + 2\sqrt{4 - x^2} + m \end{cases}$ có nghiệm ? ĐS: $-16 \leq m \leq 6$.
- VD 356.** Tìm m để hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy + x - y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 2mx - m^2 \end{cases}$ có bốn cặp nghiệm thực phân biệt ?
Đáp số: $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2} - 1$.