GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

(Tổng hợp của hungchng và các thành viên khác trên diễn đàn www.math.vn)

Bài 1.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 = 35 & (1) \\ 2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y & (2) \end{cases}$

Giải

Lấy phương trình (1) trừ 3 lần phương trình (2) theo vế ta được: $(x-2)^3 = (3+y)^3 \Rightarrow x = y+5 \quad (3)$

Thế (3) vào phương trình (2) của hệ ta được: $y^2 + 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2 \Rightarrow x = 3 \\ y = -3 \Rightarrow x = 2 \end{array}\right.$

Đáp số: $(3;-2), (2;-3)$ là nghiệm của hệ.

Bài 2.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 & (1) \\ x^2 + 2y^2 = x + 4y & (2) \end{cases}$

Giải

Lấy phương trình (1) trừ 3 lần phương trình (2) theo vế ta được: $(x-1)^3 = (2-y)^3 \Rightarrow x = 3-y \quad (3)$

Thế (3) vào phương trình (2) của hệ ta được: $y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = 2 \Rightarrow x = 1 \end{array}\right.$

Đáp số: $(2;1), (1;2)$ là nghiệm của hệ.

Bài 3.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 91 & (1) \\ 4x^2 + 3y^2 = 16x + 9y & (2) \end{cases}$

Giải

Lấy phương trình (1) trừ 3 lần phương trình (2) theo vế ta được: $(x-4)^3 = (3-y)^3 \Rightarrow x = 7-y \quad (3)$

Thế (3) vào phương trình (2) của hệ ta được: $y^2 - 7y + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 4 \Rightarrow x = 3 \\ y = 3 \Rightarrow x = 4 \end{array}\right.$

Đáp số: $(3;4), (4;3)$ là nghiệm của hệ.

Bài 4.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{5} & (1) \\ 4x^2 + 3x - \dfrac{57}{25} = -y(3x+1) & (2) \end{cases}$

Giải

Lấy phương trình (1) nhân với 25 cộng theo với với phương trình (2) nhân với 50 rồi nhóm lại ta được:

$$25(3x+y)^2 + 50(3x+y) - 119 = 0 \Leftrightarrow 3x+y = \frac{7}{5}; 3x+y = -\frac{17}{5}.$$

Trường hợp 1: $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{5} \\ y = \dfrac{7}{5} - 3x \end{cases}$ Thế ta được: $x = \dfrac{2}{5} \Rightarrow y = \dfrac{1}{5}; x = \dfrac{11}{25} \Rightarrow y = \dfrac{2}{25}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{5} \\ y = -\dfrac{17}{5} - 3x \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy $\left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{1}{5}\right); \left(\dfrac{11}{25}; \dfrac{2}{25}\right)$ là nghiệm của hệ.

Bài 5.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+3xy^2=-49 & (1) \\ x^2-8xy+y^2=8y-17x & (2) \end{cases}$

Giải

Lấy phương trình (1) cộng với phương trình (2) nhân với 3 được:

$x^3+3x^2+(3y^2-24y+51)x+3y^2-24y+49=0 \Leftrightarrow (x+1)\left((x+1)^2+3(y-4)^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-1, \quad y=4 \end{array}\right.$

Lần lượt thế vào phương trình (1) của hệ ta được $(-1;4),(-1;-4)$ là nghiệm của hệ.

Bài 6.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x^2y+2y^3+35=0 & (1) \\ 5x^2+5y^2+2xy+5x+13y=0 & (2) \end{cases}$.

Giải

Lấy phương trình (1) cộng với 3 lần phương trình (2) theo vế ta được:

$$(6y+15)x^2+3(2y+5)x+2y^3+15y^2+39y+35=0$$

$$\Leftrightarrow (2y+5)\left(3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{5}{2} \\ x=-\dfrac{1}{2}, \quad y=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right..$$

Lần lượt thế vào phương trình (1) ta được: $\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right);\left(-\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right)$ là nghiệm của hệ.

Bài 7.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=xy+x+y \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$

Giải

Chú ý rằng: $x^2-xy+y^2=\frac{1}{4}\left(3(x-y)^2+(x+y)^2\right)$

nên ta đặt $\begin{cases} a=x+y \\ b=x-y \end{cases}$ thì được hệ mới: $\begin{cases} 3a^2+b^2=4b & (1) \\ ab=3 & (2) \end{cases}$.

Đem thế $a=\frac{3}{b}$ từ phương trình (2) vào phương trình (1) rồi giải tìm được $b=3 \Rightarrow a=1$

Từ đó tìm lại được: $x=2; y=1$ là nghiệm của hệ.

Bài 7.1

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+6}=y+1 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$

Giải

ĐK: $y \geq -1$ Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+2x+6=y^2+2y+1 \\ \dfrac{1}{4}\left(3(x+y)^2+(x-y)^2\right)=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y+2)=-5 \\ 3(x+y)^2+(x-y)^2=28 \end{cases} \quad (**)$$

Đặt $\begin{cases} a=x+y \\ b=x-y \end{cases}$ khi đó $(**)$ trở thành $\begin{cases} b(a+2)=-5 \\ 3a^2+b^2=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-5 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$

Giải hệ trên ta thu được nghiệm: $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

Kết luận: Hệ phương trình đã cho có tập hợp nghiệm là: $\{(-3;2),(1;2)\}$

Bài 8.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+2y^2=xy+2y \\ 2x^3+3xy^2=2y^2+3x^2y \end{cases}.$

Giải

Với $y=0 \Rightarrow x=0$ là nghiệm của hệ.

Với $y \neq 0$, nhân phương trình 1 với $-y$ rồi cộng theo vế với phương trình 2 ta được:

$$2x^3-4x^2y+4xy^2-2y^3=0 \Leftrightarrow x=y$$

Thế lại vào phương trình 1 của hệ ta được: $2y^2=2y \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=1$

Vậy $(1;1),(0;0)$ là nghiệm của hệ

Bài 9.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{x}-y\sqrt{=}y=8\sqrt{x}+2\sqrt{y} \\ x-3y=6 \end{cases} \quad (*)$

Giải

Đk: $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$. Lúc đó hpt $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(x\sqrt{x}-y\sqrt{y}\right)=6\left(4\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) & (1) \\ x-3y=6 & (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) có:$3\left(x\sqrt{x}-y\sqrt{y}\right)=(x-3y)\left(4\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(x+\sqrt{xy}-12y\sqrt{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+4\sqrt{y}\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=3\sqrt{y} \Leftrightarrow x=9y$. Thay vào (2) có $y=1 \Rightarrow x=9$.

Vậy hpt có 1 nghiệm $\begin{cases} x=9 \\ y=1 \end{cases}$

Bài 10.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2x}{y}}+\sqrt{\dfrac{2y}{x}}=3 \\ x-y+xy=3 \end{cases} \quad (*)$

Giải

Đk $x.y>0$. Lúc đó hpt $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{y}+\dfrac{2y}{x}=3 \\ x-y+xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+2y^2-5xy=0 \\ x-y+xy=3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)(2x-y)=0 \\ x-y+xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ 2y^2+y-3=0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y=2x \\ 2x^2-x-3=0 \end{cases}.$$

Lúc đó kết hợp với đk ta được hpt có nghiệm $(x;y)$ là $(2;1)\,;\left(-3;-\dfrac{3}{2}\right);(-1;-2)\,;\left(\dfrac{3}{2};3\right)$

Bài 11.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4-y^4=240 \\ x^3-2y^3=3(x^2-4y^2)-4(x-8y) \end{cases}$

Giải

Lấy phương trình 1 trừ đi phương trình 2 nhân với 8 ta được: $(x-2)^2=(y-4)^4 \Leftrightarrow x=y-2; x=6-y$

Lần lượt thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

Trường hợp 1: $\begin{cases} x^4-y^4=240 \\ x=y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} x^4-y^4=240 \\ x=6-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy $(4;2),(-4;-2)$ là nghiệm của hệ.

Bài 12.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2}\,(x-y) = \sqrt{xy} \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

Giải

Đk: $x \geq y$. Lúc đó $\sqrt{2}\,(x-y) = \sqrt{xy} \Leftrightarrow 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2y)(2x-y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ y = 2x \end{array}\right.$

Khi $x = 2y \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

Khi $y = 2x \Rightarrow -3x^2 = 3$ (pt vô nghiệm)

Vậy đối chiếu với đk hpt có một nghiệm là $(2;1)$

Bài 13.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-1)^2 + 6(x-1)y + 4y^2 = 20 \\ x^2 + (2y+1)^2 = 2 \end{cases}$

Giải

hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + 6xy - 6y + 4y^2 = 20 \\ x^2 + 4y^2 = 1 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x+9}{3x-5} \quad (1) \\ x^2 + 4y^2 = 1 - 4y \end{cases}$

thế (1) vào hệ (2) ta được $x^2 + \left(\dfrac{2x+18}{3x-5} + 1\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \dfrac{-9}{55}.\left(x - \dfrac{8}{3}\right)^2 = 1$ hay $x = -1$

suy ra $x = -1 \Rightarrow y = -1$

Bài 14.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x = 0 \quad (1) \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$

Giải

Lấy (1)+2.(2) ta được :$(x+2y)^2 + 3\,(x+2y) + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2y+1)\,(x+2y+2) = 0$

TH1: $x + 2y + 1 = 0 \Rightarrow x = -2y - 1$ thay vào (2) ta được

$$y^2 - 2y - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} y = 1 + \sqrt{2} & \Rightarrow x = -3 - 2\sqrt{2} \\ y = 1 - \sqrt{2} & \Rightarrow x = -3 + 2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

TH2: $x + 2y + 2 = 0 \Rightarrow x = -2y - 2$ thay vào (2) ta được

$$y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & \Rightarrow x = -3 + \sqrt{5} \\ y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \Rightarrow x = -3 - \sqrt{5} \end{array}\right.$$

Do đó hpt đã cho có 4 nghiệm

$(x;y)$ là : $\left(-3 - 2\sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\right); \left(-3 + 2\sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\right); \left(-3 + \sqrt{5}; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right); \left(-3 - \sqrt{5}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Bài 15.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 = 3x + 1 \\ x^2 + 3y^2 = 3x + 1 \end{cases}$

Giải

hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} t = x^3 - 3x - 1 \\ 3t + (x^2 - 3x - 1)y = 0 \end{cases}$ với $t = y^3$.

ta có $D = x^2 - 3x - 1$, $D_t = (x^3 - 3x - 1)(x^2 - 3x - 1)$, $D_y = -3(x^3 - 3x - 1)$

nhận thấy nếu $D=0$ mà $D_y \neq 0$ suy ra pt VN

Xét $D \neq 0$ ta có $\dfrac{D_t}{D} = \left(\dfrac{D_y}{D}\right)^3$ hay $(x^2-3x-1)^3 = -27(x^3-3x-1)$

$\Rightarrow x=2$ hay $28x^5+47x^4-44x^3-151x^2-83x-13=0 \Rightarrow x=2$ hay $x \approx -1,53209$

từ đây suy ra được y

Bài 16.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (2x^2+y)(x+y)+x(2x+1)=7-2y \\ x(4x+1)=7-3y \end{cases}$

Giải

Cách 1: Thế $7=4x^2+x+3y$ ở phương trình (2) vào phương trình (1) ta được:

$(2x^2+y)(x+y)=2x^2+y \Rightarrow y=-2x^2$ hoặc $y=1-x$

Trường hợp 1: $\begin{cases} y=-2x^2 \\ x(4x+1)=7-3y \end{cases}$ vô nghiệm.

Trường hợp 2: $\begin{cases} y=1-x \\ x(4x+1)=7-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \\ y=\dfrac{3-\sqrt{17}}{4} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \\ y=\dfrac{3+\sqrt{17}}{4} \end{cases}$

Đáp số: $\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{4};\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right);\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{4};\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$ là nghiệm của hệ.

Cách 2: Phân tích (1) ta có $2x^3+2x^2y+xy+y^2+2x^2+x=7-2y$

$$\Leftrightarrow 2x^3+2x^2(y+1)+x(y+1)+(y+1)^2=8 \Leftrightarrow 2x^2(x+y+1)+(y+1)(x+y+1)=8$$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)(2x^2+y+1)=8 \Leftrightarrow (x+y+1)(4x^2+2y+2)=16$$

ta có $\begin{cases} (x+y+1)(4x^2+2y+2)=16 \\ 4x^2=7-x-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y+1)[9-(x+y)]=16 \\ 4x^2=7-x-3y \end{cases}$ suy ra $x+y=1$ hay $x+y=7$

Với $x+y=1$ ta tìm đc $x=\dfrac{1}{4}\left(1\pm\sqrt{17}\right)$ hay $y=1-x$

Với $x+y=7$ thay vào (2) phương trình VN

KL

Bài 16.1

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+7y=(x+y)^2+x^2y+7x+4 & (1) \\ 3x^2+y^2+8y+4=8x & (2) \end{cases}$

Giải

Từ pt thứ (2) trong hệ ta rút $4=8x-3x^2-y^2-8y$

Thay vào pt thứ (1) trong hệ thu gọn ta được $(x-y)\left(x^2+2x-15\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=3 \\ x=-5 \end{array}\right.$

Với $x=y$ thay vào pt thứ 2 ta được $-4x^2=4$ pt vô nghiệm

Với $x=3$ thay vào pt thứ 2 ta được $y^2+8y+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=-7 \end{array}\right.$

Với $x=-5$ thay vào pt thư 2 ta được $y^2+8y+119=0$ pt vô nghiệm

Vậy hệ pt có 2 nghiệm $(x;y)$ là $(3;-1);(3;-7)$

Bài 17.

Giải hệ phương trình:	$\begin{cases} x^3-12z^2+48z-64=0 \\ y^3-12x^2+48x-64=0 \\ z^3-12y^2+48y-64=0 \end{cases}$

Giải

Cộng theo vế các phương trình của hệ ta được: $(x-4)^3+(y-4)^3+(z-4)^3=0 \quad (*)$
từ đó suy ra trong 3 số hạng ở tổng này phải có ít nhất 1 số hạng không âm,
không mất tổng quát ta giả sử $(z-4)^3 \geq 0 \Rightarrow z \geq 4$
Thế thì phương trình thứ nhất của hệ tương đương $x^3-16=12(z-2)^2 \geq 12.2^2 \Rightarrow x \geq 4$
Thế thì phương trình thứ hai của hệ tương đương $y^3-16=12(x-2)^2 \geq 12.2^2 \Rightarrow y \geq 4$
Do vậy từ $(x-4)^3+(y-4)^3+(z-4)^3=0 \quad (*) \Rightarrow x=y=z=4$ Thử lại thỏa mãn.
Vậy $(4;4;4)$ là nghiệm của hệ.

Bài 18.

Giải hệ phương trình:	$\begin{cases} x^4+4x^2+y^2-4y=2 \\ x^2y+2x^2+6y=23 \end{cases}$

Giải

hệ đã cho tương đương $\begin{cases} t-4y=2-x^4-4x^2 \\ (x^2+6)y=23-2x^2 \end{cases}$
với $t=y^2$ ta tính được $D=x^2+6, \quad D_t=-x^6-10x^4-30x^2+104, \quad D_y=23-2x^2$.
ta có $\dfrac{D_t}{D}=\left(\dfrac{D_y}{D}\right)^2$ suy ra $(x^2+6)(-x^6-10x^4-30x^2+104)=(23-2x^2)^2$
$\Leftrightarrow (1-x)(1+x)(1+x^2)(x^4+16x^2+95)=0$ vậy suy ra $x=1$ hay $x=-1$, từ đây tìm được y

Bài 19.

Giải hệ phương trình:	$\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ x^2+2xy-7x-5y+9=0 \end{cases}$

Giải

Cách 1: Cộng theo vế 2 phương trình của hệ ta được $(2x+y-3)(x+y-2)=0$ Từ đó dẫn đến 2 trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ y=3-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ y=2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Kết luận: $(1;1),(2;-1)$ là nghiệm của hệ.

Cách 1: đặt $\begin{cases} x=a+1 \\ y=b+1 \end{cases}$ hệ trở thành $\begin{cases} a^2+b^2+3a+3b+ab=0 & (1) \\ a^2-3a-3b+2ab=0 & (2) \end{cases}$
cộng (1) và (2) ta đc $2a^2+b^2+3ab=0 \Leftrightarrow (2a+b)(a+b)=0$ suy x và y

Bài 20.

Giải hệ phương trình:	$\begin{cases} 3\left(x^2+y^2\right)+\dfrac{1}{(x-y)^2}=2(10-xy) \\ 2x+\dfrac{1}{x-y}=5 \end{cases}$

Giải

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)^2+(x-y)^2+\dfrac{1}{(x-y)^2}=20 \\ x+y+x-y+\dfrac{1}{x-y}=5 \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y+\dfrac{1}{x-y} \end{cases}$

Ta có hệ sau: $\begin{cases} 2u^2+v^2-2=20 \\ u+v=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=5-u \\ 2u^2+(5-u)^2=22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=\dfrac{1}{3} \\ v=\dfrac{14}{3} \end{cases}$

TH 1: $\begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x-y+\dfrac{1}{x-y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

TH 2: $\begin{cases} u=\dfrac{1}{3} \\ v=\dfrac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{1}{3} \\ x-y+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=\dfrac{7+2\sqrt{10}}{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4+\sqrt{10}}{3} \\ y=\dfrac{-3-\sqrt{10}}{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\dfrac{4-\sqrt{10}}{3} \\ y=\dfrac{-3+\sqrt{10}}{3} \end{cases}$

Bài 21.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} a(a+b)=3 \\ b(b+c)=30 \\ c(c+a)=12 \end{cases}$

Giải

Bài 22.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3-xy^2=1 \\ 4x^4+y^4-4x-y=0 \end{cases}$

Giải

Với $x=0 \Rightarrow y=1$

Với $y=0 \Rightarrow x=1$

Với $x \neq 0; y \neq 0$ thay (1) vào (2) ta được:

$$4x^4+y^4=(4x+y)(x^3+y^3-xy^2) \Leftrightarrow 3y^2-4xy+x^2=0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{y}{x}\right)^2-4\left(\frac{y}{x}\right)+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{y}{x}=1 \\ \dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Với $x=y$ thay vào (1) ta có $x=1 \Rightarrow y=1$

Với $x=3y$ thay vào (1) ta có $x=\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}} \Rightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$

Vậy hpt có 4 nghiệm phân biệt $(x;y)$ là $(0;1);(1;0);(1;1);\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}};\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}\right)$

Bài 23.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-y^2=3 & (1) \\ \log_3(x+y)-\log_5(x-y)=1 & (2) \end{cases}$

Giải

ĐK: $\begin{cases} x+y>0 \\ x-y>0 \end{cases}$

Từ pt (1) có $\log_3(x^2-y^2)=1 \Leftrightarrow \log_3(x+y)+\log_3(x-y)=1 \Leftrightarrow \log_3(x+y)=1-\log_3(x-y) \quad (*)$

Thay $(*)$ vào pt (2) có

$1-\log_3(x-y)-\log_5 3.\log_3(x-y)=1 \Leftrightarrow \log_3(x-y)(1-\log_3 5)=0 \Leftrightarrow \log_3(x-y)=0 \Leftrightarrow x-y=1$

Lúc đó ta có hpt mới $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy hpt có 1 nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Bài 24.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_4(x^2+y^2)-\log_4(2x)+1=\log_4(x+3y) \\ \log_4(xy+1)-\log_4(2y^2+y-x+2)=\log_4\left(\dfrac{x}{y}\right)-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Giải

hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x^2+y^2)2}{x}=x+3y & (1) \\ \dfrac{xy+1}{2y^2+y-x+2}=\dfrac{x}{2y} & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow x^2-3xy+2y^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=y & (3) \\ x=2y & (4) \end{array}\right.$

$(2),(3) \Leftrightarrow x,y \in \mathbb{R}>0$

$(2),(4) \Leftrightarrow x=2, y=1$

Bài 25.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2(y+1)=6y-2(1) \\ x^4y^2+2x^2y^2+y(x^2+1)=12y^2-1(2) \end{cases}$

Giải

Dễ thấy $y \neq 0$ và $y \neq -1$. Từ $(1) \Rightarrow x^2y(y+1)=6y^2-2y$, và $x^2-2=\dfrac{4y-4}{y+1}; x^2+3=\dfrac{9y+1}{y+1}$

Thay (1) vào (2), ta có: $x^4y^2+x^2y^2+y+6y^2-2y=12y^2-1 \Leftrightarrow (x^2-2)(x^2+3)y^2-y+1=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{4(y-1)(9y+1)y^2}{(y+1)^2}=y-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ 4(9y+1)y^2=(y+1)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ y=\dfrac{1}{3} \Rightarrow x=0 \end{array}\right.$

Bài 26.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x=2(1) \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}=-2(2) \end{cases}$

Giải

Cách 1: Đk: $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 2y-y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$

Đặt $t=x+1, 0 \leq t \leq 2$.Lúc đó hpt đã cho trở thành:

$$\begin{cases} t^3-3t^2+2=y^3-3y^2+2 \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^3-3t^2=y^3-3y^2 \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}=-2 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(a)=a^3-3a^2, 0 \leq a \leq 2$. Có $f'(a)=3a^2-6a$; $\quad f'(a)=0 \Leftrightarrow 3a^2-6a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=2 \end{array}\right.$

Lập BBT ta có $f(a)=a^3-3a^2$ nghịch biến với $0 \leq a \leq 2$ Vậy $f(t)=f(y) \Rightarrow t=y \Rightarrow x+1=y$

Thay $x+1=y$ vào pt (2) có $x^2-2\sqrt{1-x^2}=-2 \Leftrightarrow 1-x^2+2\sqrt{1-x^2}-3=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{1-x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-x^2}=1 \\ \sqrt{1-x^2}=-3 \end{array}\right. \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=1$

Vậy hpt có 1 nghiệm $(x;y)$ duy nhất là$(0;1)$

Cách 2: Sự xuất hiện của 2 căn thức ở pt (2) mách bảo ta đặt $z=1-y$ khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} x^3-3x+z^3-3z=0 \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{1-z^2}=-2 \end{cases}$$

Phương trình (1) của hệ này tương đương $x+z=0$ hoặc $x^2+xz+z^2=3$

Thế thì xảy ra 2 trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases} z=-x \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{1-z^2}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} x^2+xz+z^2=3 \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{1-z^2}=-2 \end{cases}$

Phương trình đầu của hệ này kết hợp với điều kiện của x và z dẫn đến $x=z=-1;x=z=1$, cả 2 khả năng này đều không thỏa mãn phương trình thứ 2, nên trường hợp này vô nghiệm.

Kết luận: $(0;1)$ là nghiệm của hệ.

Bài 27.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-y^2-y=0 \\ x^2+xy+x=1 \end{cases}$

Giải

Bài 28.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 9y^3(3x^3-1)=-125 \\ 45x^2y+75x=6y^2 \end{cases}$

Giải

Với $y=0$ hệ pt vô nghiệm. Với $y\neq 0$ chia 2 vế pt (1) và pt (2) lần lượt cho $y^3\neq 0;y^2\neq 0$ ta có hpt

$$\begin{cases} 27x^3+\dfrac{125}{y^3}=9 \\ 45\dfrac{x^2}{y}+75\dfrac{x}{y^2}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27x^3+\dfrac{125}{y^3}=9 \\ 3x.\dfrac{5}{y}(3x+\dfrac{5}{y})=6 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $u=3x;v=\dfrac{5}{y},v\neq 0$

Lúc đó: $(*)\Leftrightarrow \begin{cases} u^3+v^3=9 \\ uv(u+v)=6n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^3-3uv(u+v)=9 \\ uv(u+v)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^3=27 \\ uv(u+v)=6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ uv=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$

Với $\begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=1 \\ \dfrac{5}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

Với $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=2 \\ \dfrac{5}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=5 \end{cases}$

Vậy hpt đã cho có 2 nghiệm $(x;y)$ là $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{2}\right);\left(\dfrac{2}{3};5\right)$

Bài 29.

Giải hệ phương trình:	$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[4]{32-x}-y^2+3=0 & (1) \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{32-x}+6y-24=0 & (2) \end{cases}$

Giải

Đk: $\begin{cases} 0 \le x \le 32 \\ y \le 4 \end{cases}$. Lấy $(1)+(2)$ vế theo vế ta có $\sqrt{x}+\sqrt{32-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}=y^2-6y+21 \quad (*)$

Có $y^2+6y+21=(y-3)^2+12 \ge 12$

Lại có $\sqrt{x}+\sqrt{32-x} \le \sqrt{(1+1)(x+32-x)}=8 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x} \le \sqrt{(1+1)(\sqrt{x}+\sqrt{32-x})}=4$

Vậy $\sqrt{x}+\sqrt{32-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x} \le 12$

Do $(*)$ nên có hpt $\begin{cases} \sqrt{x}=\sqrt{32-x} \\ \sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{32-x} \\ y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=3 \end{cases}$

Vậy hệ pt có một nghiệm duy nhất $(x;y)$ là $(16;3)$

Bài 30.

Giải hệ phương trình:	$\begin{cases} \sqrt{x+y+1}+1=4(x+y)^2+\sqrt{3x+3y} & (1) \\ 12x(2x^2+3y+7xy)=-1-12y^2(3+5x) & (2) \end{cases}$

Giải

Đặt $\sqrt{x+y+1}=a \ge 0; \sqrt{3x+3y}=b \ge 0$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2-b^2=3 \\ 9a+9=4b^4+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2-b^2=3 \\ 9a+\left(3a^2-b^2\right)^2=4b^4+9b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2-b^2=3 \\ 9a-9b+9a^4-6a^2b^2-3b^4=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2-b^2=3 \\ (a-b)\left(9a^3+9a^2b+3ab^2+3b^3=0\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2-b^2=3 \\ a=b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b=\frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow 2x+2y=1. \Leftrightarrow 2x=1-2y$$

Thay vào (2) ta được : $(x,y)=\left(\frac{-5}{6};\frac{4}{3}\right),\left(\frac{7}{10};\frac{-1}{6}\right)$

Bài 31.

Giải hệ phương trình:	$\begin{cases} x^3y(1+y)+x^2y^2(y+2)+xy^3=30 \\ x^2y+x\left(1+y+y^2\right)+y-11=0 \end{cases}$

Giải

Bài 32.

Giải hệ phương trình:	Giải hệ $\begin{cases} x(1+x)+\frac{1}{y}\left(\frac{1}{y}+1\right)=4 & (1) \\ x^3y^3+y^2x^2+xy+1=4y^3 & (2) \end{cases}$

Giải

$(2) \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{y}\right)\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)=4$ Từ $(1),(2) \Rightarrow x+\frac{1}{y}$ và $x^2+\frac{1}{y^2}$ là nghiệm của pt

$A^2-4A+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{y}=2 \\ x^2+\frac{1}{y^2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{y}=2 \\ \frac{x}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$

Bài 33.

Giải hệ phương trình:	$\begin{cases} 2+6y+\sqrt{x-2y}=\dfrac{x}{y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \end{cases}$

Giải

Bài 34.

Giải hệ phương trình:	$\begin{cases} \left(1-\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x}=2 \quad (1) \\ \left(1+\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y}=6 \quad (2) \end{cases}$

Giải

Cách 1: Đk: $x>0; y>0$

Từ đó lấy $(1)+(2)$; $(2)-(1)$ ta được hpt $\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{6}{\sqrt{y}}=2 \\ \dfrac{24}{y+3x}=\dfrac{6}{\sqrt{y}}-\dfrac{2}{\sqrt{x}} \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{9}{y}-\dfrac{1}{x} \Rightarrow 12xy=(y+3x)(9-y)$

$\Rightarrow y^2+6xy-27x^2=0 \Rightarrow (y+9x)(y-3x)=0 \Rightarrow y=3x$ do $x>0, y>0$

Thay $y=3x$ vào pt (1) ta được: $x-2\sqrt{x}-2=0 \Rightarrow \sqrt{x}=1+\sqrt{3} \Rightarrow x=4+2\sqrt{3} \Rightarrow y=3(4+2\sqrt{3})$

Vậy hpt có 1 nghiệm $(x;y)$ là $(4+2\sqrt{3};3(4+2\sqrt{3}))$

Cách 2:Đk: $x>0; y>0$ Nhân pt (1) với $\sqrt{3}$ và nhân pt (2) với hệ số ảo i rồi cộng 2 vế ta được:

$\sqrt{3x}+\sqrt{y}i-\dfrac{12}{y+3x}(\sqrt{3x}-\sqrt{y}i)=2\sqrt{3}+6i$

Đặt $z=\sqrt{3x}+\sqrt{y}i$ thì $z-\dfrac{12}{z}=2\sqrt{3}+6i \Leftrightarrow z^2-(2\sqrt{3}+6i)z-12=0$

$\Leftrightarrow z=3+\sqrt{3}+(3+\sqrt{3}i)$ (thỏa mãn) hoặc $z=(\sqrt{3}-3)+(3-\sqrt{3}i)$(loại vì $\sqrt{3x}<0$)

Với $z=3+\sqrt{3}+(3+\sqrt{3}i \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x}=3+\sqrt{3} \\ \sqrt{y}=3+\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4+2\sqrt{3} \\ y=12+6\sqrt{3} \end{cases}$

Bài 35.

Giải hệ phương trình:	$\begin{cases} 2y\left(x^2-y^2\right)=3x \\ x\left(x^2+y^2\right)=10y \end{cases}$

Giải

Nhân chéo ta có:

$3x^2\left(x^2+y^2\right)=20y^2\left(x^2-y^2\right) \Leftrightarrow 3x^4-17x^2y^2+20y^4=0 \Leftrightarrow 3x^2=5y^2$ or $x^2=4y^2$

Thay vào ta có các nghiệm (x;y)= $(0;0)$, $\left(\pm\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}};\pm\sqrt[4]{\dfrac{27}{125}}\right)$; $(\pm1;\pm2)$

Bài 36.

Giải hệ phương trình:	$\begin{cases} 2\sqrt{x+3y+2}-3\sqrt{y}=\sqrt{x+2} \quad (1) \\ \sqrt{y-1}-\sqrt{4-x}+8-x^2=0 \quad (2) \end{cases}$

Giải

$(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{x+3y+2}=\sqrt{x+2}+3\sqrt{y} \Leftrightarrow 4(x+3y+2)=x+2+9y+6\sqrt{y(x+2)}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+2}-\sqrt{y})^2=0 \Leftrightarrow y=x+2$

Thay vào (2), ta có: $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+8-x^2=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}+\dfrac{x-3}{\sqrt{4-x}+1}+(3-x)(3+x)=0$

$\Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=5$

Ta cần cm pt $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}+\dfrac{1}{1+\sqrt{4-x}}=x+3(*)$ vô nghiệm trên đoạn $[-1,4]$

Ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}\le\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}\le 1\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}+\dfrac{1}{1+\sqrt{4-x}}<\dfrac{3}{2}$ mà $x+3\ge 2\Rightarrow(*)$ vô nghiệm

Bài 37.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2})=1 & (1)\\ x\sqrt{6x-2xy+1}=4xy+6x+1 & (2)\end{cases}$

Giải

Cách 1:Xét $f(t)=t+\sqrt{t^2+1},\quad f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}>\dfrac{|t|-t}{\sqrt{t^2+1}}\ge 0$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên R

$(1)\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=-y+\sqrt{1+y^2}\Leftrightarrow f(x)=f(-y)\Leftrightarrow x=-y$

$(2)\Leftrightarrow x\sqrt{6x+2x^2+1}=-4x^2+6x+1\Leftrightarrow(\sqrt{2x^2+6x+1}-\dfrac{x}{2})^2=\dfrac{25}{4}x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+6x+1}=3x\\ \sqrt{2x^2+6x+1}=-2x\end{array}\right.$

Với $\sqrt{2x^2+6x+1}=3x\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+6x+1=9x^2\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x^2-6x-1=0\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x=1\rightarrow y=-1$

Với $\sqrt{2x^2+6x+1}=-2x\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+6x+1=4x^2\\ x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-6x-1=0\\ x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}\rightarrow y=\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}$

Cách 2: Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ thành: $x+\sqrt{1+x^2}=-y+\sqrt{1+y^2}$ (1)

Rõ ràng (1) khiến ta nghĩ đến hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$, hàm này đồng biến trên R

nên (1) tương đương $x=-y$ thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$x\sqrt{6x+2x^2+1}=-4x^2+6x+1$ (2) Có một cách hay để giải (2) bằng ẩn phụ, nhưng để đơn giản, ta lũy thừa 2 vế ta tìm được nghiệm $x=1;x=\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}$

Kết luận: $(1;-1);(\dfrac{3-\sqrt{11}}{2};-\dfrac{3-\sqrt{11}}{2})$ là nghiệm của hệ.

Bài 38.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y}\\ \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1\end{cases}$

Giải

$2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y}\Leftrightarrow\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^3+\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\sqrt{(3-2y)^3}+\sqrt{3-2y}$

$\Leftrightarrow\sqrt{3-2y}=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ (Do hàm số $f(t)=t^3+t$ đồng biến trên R)

Thay vào phương trình thứ hai ta được: $\left(\sqrt{x+2}-3\right)-\left(\sqrt[3]{15-x}-2\right)=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{x-7}{\sqrt{x+2}+3}+\dfrac{x-7}{\sqrt[3]{(15-x)^2}+2\sqrt[3]{15-x}+4}=0\Leftrightarrow x=7\Rightarrow y=\dfrac{111}{98}$

Bài 39.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+2xy-2x-y=0\\ x^4-4(x+y-1)x^2+y^2+2xy=0\end{cases}$

Giải

Từ pt (2) ta có $x^4-4x^3-4yx^2+4x^2+y^2+2xy=0$

$\Leftrightarrow(x^4-4x^3+4x^2)-4(x^2-2x)y+4y^2-3y^2-6xy=0\Leftrightarrow(x^2-2x-2y)^2=3y^2+6xy$

Lúc đó hpt đã cho trở thành: $\begin{cases} x^2+2xy-2x-y=0 \\ (x^2-2x-2y)^2=3y^2+6xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x^2+2xy-2x & (3) \\ y^2(1+2x)^2=3y(y+2x) & (4) \end{cases}$

Từ (4) có $2y(2xy+2x^2-3x-y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ 2xy+2x^2-3x-y=0 \end{array} \right.$

+ Với y= 0 từ (3) có $x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array} \right.$

+Với $2xy+2x^2-3x-y=0 \Rightarrow y=2xy+2x^2y-3x$ thay vào (3) có $x(2xy-x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=0 \\ y=\dfrac{x+1}{2x}(x\neq 0) \end{array} \right.$

Thay $y=\dfrac{x+1}{2x}(x\neq 0)$ vào pt (3) ta có $(x-1)(2x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$

Vậy hpt đã cho có 3 nghiệm $(x;y)$ là $(0;0),(2;0),(1;1)$

Bài 40.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+2y=4 \\ (x^2+xy)(y+1)+x=6 \end{cases}$

Giải

Bài 41.

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} 3y-m\sqrt{x^2+1}=1 \\ x+y+\dfrac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}=m^2 \end{cases}$

Giải

Hệ pt đã cho trở thành $\begin{cases} y+\sqrt{x^2+1}=m^2 \\ 3y-m\sqrt{x^2+1}=1 \end{cases} \quad (I)$

* Điều kiện cần:

giả sử hpt có nghiệm $(x_0;y_0)$ thì $(-x_0;y_0)$ cũng là nghiệm của hệ

nên hpt có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow x_0=-x_0 \Rightarrow x_0=0$

Lúc đó hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y=m^2-1 \\ 3y=1+m \end{cases} \Rightarrow 3m^2-m-4=0 \Leftrightarrow m=-1 \vee m=\dfrac{4}{3}$

*Điều kiện đủ:

+ Với m= -1 ta có $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y+\sqrt{x^2+1}=1 \\ 3y+\sqrt{x^2+1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ Vậy m= -1 (nhận)

+ Với $m=\dfrac{4}{3}$ ta có $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y+\sqrt{x^2+1}=\dfrac{16}{9} \\ 3y-\dfrac{4}{3}\sqrt{x^2+1}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{7}{9} \end{cases}$ Vậy $m=\dfrac{4}{3}$ (nhận)

Do đó $m=-1; m=\dfrac{4}{3}$ là các giá trị cần tìm.

Bài 42.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y^2-2x+y-1=0 \\ 2x^2+y^2-4x-5=0 \end{cases}$

Giải

Bài 43.

Giải hệ: $\begin{cases} xy+x-7y=-1 & (1) \\ x^2y^2+xy-13y^2=-1 & (2) \end{cases}$

Giải

Từ pt $(1) \Rightarrow xy+1=7y-x$ thế xuống pt (2)

pt $(2) \Leftrightarrow (xy+1)^2-xy-13y^2=0 \Leftrightarrow (7y-x)^2-xy-13y^2=0 \Leftrightarrow x^2-15xy+36y^2=0$

$\Leftrightarrow (x-3y)(x-12y)=0 \Rightarrow x=3y$ Hoặc $x=12y$

Tới đó là ra rồi :D

Bài 44.

Giải hệ: $\begin{cases} (2011x+3)(\ln(x-2)-\ln 2011x)=(2011y+3)(\ln(y-2)-\ln 2011y) & (1) \\ 2y^6+55y^2+58\sqrt{x-2}=2011 & (2) \end{cases} (x;y\in\mathbb{Z})$

Giải

Điều kiện: $x,y>2$, khi đó từ (1), ta xét hàm số: $f(t)=(2011t+3)(\ln(t-2)-\ln 2011t) \quad t>2$,

dễ thấy $f(t)$ đơn điệu trên tập xác định của nó nên :$f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$,

Thay vào (2), ta được phương trình:

$2x^6+55x^2+58\sqrt{x-2}=2011 \Leftrightarrow 2x^6+55x^2-1953+58\left(\sqrt{x-2}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+3)(x^4+18x^2+217)+58\dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}=0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left((x+3)(2x^4+18x^2+217)+\dfrac{58}{\sqrt{x-2}+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=3$, vì: $(x+3)(2x^4+18x^2+217)+\dfrac{58}{\sqrt{x-2}+1}>0 \quad x>2$

Kết luận: Hệ phương trình đã cho có nghiệm là:$(3;3)$

Bài 45.

Giải hệ: $\begin{cases} 8x^6-\frac{1}{2}xy=y-3x^4 & (1) \\ x^3-4x^2y=y & (2) \end{cases}$

Giải

Từ phương trình thứ nhất rút ra: $y=\dfrac{8x^6+3x^2}{x+2}$

Từ phương trình thứ hai rút ra: $y=\dfrac{x^3}{4x^2+1}$

Từ đó dẫn đến: $\dfrac{8x^6+3x^2}{x+2}=\dfrac{x^3}{4x^2+1} \Rightarrow x^3(64x^6+16x^4+23x^2-2x+6)=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0.$

Đáp số: (0; 0)

Bài 46.

Giải hệ: $\begin{cases} x^2+xy+2x+2y-16=0 & (1) \\ (x+y)(4+xy)=32 & (2) \end{cases}$

Giải

Hệ pt đã cho $\begin{cases} (x+y)(x+2)=16 & (1') \\ (x+y)(4+xy)=32 & (2') \end{cases}$

* Với $x=y$ từ pt(1) có $x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=2 & \text{hpt đã cho thỏa} \\ x=-4 & \text{hpt đã cho không thỏa} \end{array}\right.$

* Với $x=-y$ hpt không thỏa.

* Với $x\neq -y$ lấy $\dfrac{(1')}{(2')} \Rightarrow \dfrac{x+2}{4+xy}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x(2-y)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \Rightarrow y=8 \\ y=2 & \Rightarrow x=2 \text{ hay } x=-6 \end{array}\right.$

Vậy hpt có 3 nghiệm phân biệt $(x;y)$ là $(2;2),(0;8),(-6;2)$

Bài 47.

Giải hệ: $\begin{cases} xy = x + 7y + 1 \\ x^2y^2 = 10y^2 - 1 \end{cases}$

Giải

Từ phương trình thứ nhất của hệ rút x theo y ta được: $x = \dfrac{7y+1}{y-1}$

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $\left(\dfrac{7y+1}{y-1}\right)^2 .y^2 = 10y^2 - 1$

$\Rightarrow 39y^4 + 34y^3 - 8y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \Rightarrow x = 3 \\ y = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow x = 1 \end{array}\right.$

Đáp số: $(3;-1), \left(1;-\dfrac{1}{3}\right)$ là nghiệm của hệ.

Bài 48.

Giải hệ: $\begin{cases} x^3(3y+55) = 64 \\ xy(y^2+3y+3) = 12 + 51x \end{cases}$

Giải

Dễ thấy $x = 0$ không thỏa mãn hệ. Viết lại hệ dưới dạng: $\begin{cases} 3y + 55 = t^3 \\ y^3 + 3y^2 + 3y = 3t + 51 \end{cases}$

với $t = \dfrac{4}{x}$ Cộng vế với vế của hệ ta được:

$(y+1)^3 + 3(y+1) + 51 = t^3 + 3t + 51 \Leftrightarrow y + 1 = t$ (do $f(t) = t^3 + 3t + 51$ đồng biến trên R)

từ đó có: $t^3 - 3(y-1) - 55 = 0 \Leftrightarrow (t-4)\left(t^2 + 4t + 13\right) = 0 \Leftrightarrow t = 4$

Vậy hệ có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

Bài 49.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_3(2x+1) - \log_3(x-y) = \sqrt{4x^2+4x+2} - \sqrt{(x-y)^2+1} - 3x^2 + y^2 - 4x - 2xy - 1 \\ \log_3(2x) + 4x^2 - \sqrt{4x^2+1} = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$

Giải

Viết phương trình thứ nhất của hệ thành:

$\sqrt{(2x+1)^2+1} - (2x+1)^2 - \log_3(2x+1) = \sqrt{(x-y)^2+1} - (x-y)^2 - \log_3(x-y) \quad (*)$

Xét hàm số: $f(t) = \sqrt{(t)^2+1} - (t)^2 - \log_3(t)$ với $t > 0$

Có: $f'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{(t)^2+1}} - (2t + \dfrac{1}{t}) \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} \leq 0$ nên f nghịch biến Thế thì $(*) \Leftrightarrow 2x + 1 = x - y \quad (1)$

Với phương trình thứ hai, xét hàm: $f(x) = \log_3(2x) + 4x^2 - \sqrt{4x^2+1}$ với $x > 0$

Có: $f'(x) = 4x(2 - \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}}) + \dfrac{1}{x} > 0$ nên f đồng biến

Thế mà $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \sqrt{2}$ nên $x = \dfrac{1}{2}$ thỏa mãn phương trình thứ hai.

Kết hợp với (1) cho ta $y = -\dfrac{3}{2}$ Vậy $\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$ là nghiệm của hệ.

Bài 50.

Giải hệ: $\begin{cases} \dfrac{x^4}{y^4} + \dfrac{y^4}{x^4} - (\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2}) + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = -2 & (1) \\ x^2 + y^6 - 8x + 6 = 0 & (2) \end{cases}$

Giải

ĐK: $x \neq 0; y \neq 0$

Với pt(1): Đặt $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=t \Rightarrow t^2=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2 \Rightarrow \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=t^2-2$

Mặt khác : $\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)^2=(t^2-2)^2 \Rightarrow \frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}+2=t^4-4t^2+4$

Từ đó:$\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}=t^4-4t^2+2$

Theo AM_GM có $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2} \geq 2 \Leftrightarrow t^2 \geq 4 \Leftrightarrow |t| \geq 2$

Ta có vế trái của pt (1) $g(t)=t^4-5t^2+t+4, |t| \geq 2$ Có $g'(t)=2t(2t^2-5)+1$

Nhận xét:

+ $t \geq 2 \Rightarrow 2t(2t^2-5) \geq 4(8-5)>0 \Rightarrow g'(t)>0$

+ $t \leq -2 \Rightarrow 2t \leq -4; 2t^2-5 \geq 3 \Rightarrow -2t(2t^2-5) \geq 12 \Rightarrow 2t(2t^2-5) \leq -12 \Rightarrow g'(t)<0$

Lập BBT có giá trị nhỏ nhất của g(t) =-2 đạt được tại $t=-2$

Vậy từ pt(1) có $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2 \quad (*)$

Đặt $u=\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{1}{u}, u \neq 0$

Lúc đó pt $(*) \Leftrightarrow u+\frac{1}{u}=-2 \Leftrightarrow (u+1)^2=0 \Leftrightarrow u=-1 \Leftrightarrow x=-y$

Thay $x=-y$ vào pt(2) có :$x^6+x^2-8x+6=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^4+2x^3+3x^2+4x+6)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left[x^2(x+1)^2+2(x+1)^2+4\right]=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=-1$

Vậy hpt có duy nhất 1 nghiệm $(x;y)$ là $(1;-1)$

Bài 51.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(2x^2-1)(2y^2-1)=\frac{7}{2}xy \\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0\end{cases}$

Giải

Dễ thấy $xy=0$ không thỏa mãn hệ.

Với: $xy \neq 0$ viết lại hệ dưới dạng: $\begin{cases}\left(2x-\frac{1}{x}\right)\left(2y-\frac{1}{y}\right)=\frac{7}{2} \\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0\end{cases}$

ĐK để phương trình $x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0$ (ẩn x) có nghiệm là:

$\Delta_1=(y-7)^2-4y^2+24y-56 \geq 0 \Leftrightarrow y \in \left[1;\frac{7}{3}\right]$

ĐK để phương trình $x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0$ (ẩn y) có nghiệm là:

$\Delta_2=(x-6)^2-4x^2+28x-56 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[2;\frac{10}{3}\right]$

Xét hàm số $f(t)=2t-\frac{1}{t}$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Nên: $\Rightarrow f(x).f(y) \geq f(2).f(1)=\frac{7}{2}$

Kết hợp với phương trình thứ nhất ta được $\begin{cases}x=2 \\ y=1\end{cases}$ là nghiệm của hệ

Bài 52.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^4+2y^3-x=-\frac{1}{4}+3\sqrt{3} & (1) \\ y^4+2x^3-y=-\frac{1}{4}-3\sqrt{3} & (2)\end{cases}$

Giải

Lấy (1)+(2), ta có: $x^4+2x^3-x+y^4+2y^3-y=\dfrac{-1}{2}$

$\Leftrightarrow (x^2+x)^2-(x^2+x)+\dfrac{1}{4}+(y^2+y)^2-(y^2+y)+\dfrac{1}{4}=0$

$\Leftrightarrow (x^2+x-\dfrac{1}{2})^2+(y^2+y-\dfrac{1}{2})^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Bài 53. Đề thi thử lần 2 chuyên Lê Quý Đôn_ Bình Đinh

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2(3x+1)-\log_4 y=3 & (1) \\ 2^{\sqrt{x^2-4y}}+3^{\log_9 4}=10 & (2) \end{cases}$

Giải

Đk: $x>-\dfrac{1}{3},\ y>0,\ x^2-4y\geq 0$

Từ pt(1) có: $\log_2(3x+1)=3+\log_2\sqrt{y}\Leftrightarrow 3x+1=4\sqrt{4y}\quad (*)$

Từ pt(2) có: $2^{\sqrt{x^2-4y}}+2=10\Leftrightarrow 2^{\sqrt{x^2-4y}}=8\Leftrightarrow \sqrt{x^2-4y}=3\Leftrightarrow 4y=x^2-9\quad (**)$

Thay $(**)$ vào $(*)$ ta được: $3\sqrt{x^2-9}=16(x^2-9)\Leftrightarrow 7x^2-6x-145=0\Leftrightarrow x=5\vee x=-\dfrac{19}{7}$ (loại)

Với $x=5\Rightarrow y=4$. Vậy hệ pt có 1 nghiệm $(x;y)$ là $(5;4)$

Bài 54.

Giải hệ: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{y}{x}=2\dfrac{\sqrt{x}}{y}+2(1) \\ y(\sqrt{x^2+1}-1)=\sqrt{3(x^2+1)}(2) \end{cases}$

Giải

$(1)\Leftrightarrow \dfrac{y+\sqrt{x}}{x}=\dfrac{2(y+\sqrt{x})}{y}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=-y(*) \\ y=2x(**) \end{array}\right.$

Với $(*)$, ta dễ thấy $y<0$, tức là VT của $(2)<0$, trong khi VP lại lớn hơn 0 nên loại!

Với $(**)$, ta có: $2x(\sqrt{x^2+1}-1)=\sqrt{3(x^2+1)}\Leftrightarrow 4x^4-8x^2\sqrt{x^2+1}-3(x^2+1)=0$ (ĐK: $x>0$)

$\Leftrightarrow 4(x^2-\sqrt{x^2+1})^2=\dfrac{7}{4}(x^2+1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-\sqrt{x^2+1}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{x^2+1}(i) \\ x^2-\sqrt{x^2+1}=\dfrac{-\sqrt{7}}{2}\sqrt{x^2+1}(ii) \end{array}\right.$

Dễ thấy (ii) vô nghiệm bởi vì $\dfrac{-\sqrt{7}}{2}+1<0$ Còn $(i)\Leftrightarrow x^4-(\dfrac{11}{4}+\sqrt{7})x^2-(\dfrac{11}{4}+\sqrt{7})=0$

Đặt $\alpha=\dfrac{11}{4}+\sqrt{7}$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{-\alpha+\sqrt{(\alpha)^2+4\alpha}}{2}}$

Bài 55.

Giải hệ: $\begin{cases} 2\sqrt{2x+3y}+\sqrt{5-x-y}=7 \\ 3\sqrt{5-x-y}-\sqrt{2x+y-3}=1 \end{cases}$

Giải

Bài 56. Bài hệ hay!

Giải hệ: $\begin{cases} 6x^2+y^2-5xy-7x+3y+2=0 & (1) \\ \dfrac{x-y}{3}=\ln(x+2)-ln(y+2) & (2) \end{cases}$

Giải

Đk: $x>-2; y>-2$

Từ pt (1) có :$y^2+(3-5x)y+6x^2-7x+2=0 \Leftrightarrow (y-3x+2)(y-2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3x-2 \\ y=2x-1 \end{array}\right.$

Từ pt (2) có $x-3\ln(x+2)=y-3\ln(y+2)$

Xét hàm số $y=f(t)=t-3ln(t+2), t>-2$ Có $f'(t)=\dfrac{t-1}{t+2}$

Từ đó $f'(t)=0 \Leftrightarrow t-1=0 \Leftrightarrow t=1$

Lập BBT ta nhận có nhận xét hàm số $y=f(t)$ nghịch biến trên $(-2;1)$ và đồng biến trên $(1;+\infty)$

Từ đó ta đi đến các nhận xét sau:

+ Với $x=1 \Rightarrow y=1$ kiểm tra ta thấy $x;y$ thỏa hệ

+ Với $x,y \in (-2;+\infty), (x \neq 1) \Rightarrow f(y)>f(x)$

Thật vậy: vì $y=3x-2 \vee y=2x-1 \Rightarrow y-x=2(x-1) \vee y-x=x-1$

Nhận thấy

+ $x>1 \Rightarrow y>x \Rightarrow f(y)>f(x)$ do hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

+$x<1 \Rightarrow y<x \Rightarrow f(y)>f(x)$ do hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$

Do đó hệ pt đã cho có 1 nghiệm $(x;y)$ duy nhất là $(1;1)$.

Bài 57. Trích đề học sinh giỏi Thừa Thiên Huế 2008 - 2009 khối chuyên.

Giải hệ: $\begin{cases} 2^x+4^y=32 \\ xy=8 \end{cases}$

Giải

Ta có $x;y$ phải là số dương. Vì nếu $x;y$ âm thì $2^x+4^y<2<32$

Khi đó ta có: $2^x+4^y \geq 2\sqrt{2^{x+2y}} \geq 2\sqrt{2^{2\sqrt{2xy}}}=32$

Dấu $=$ xảy ra khi $x=2y$. Khi đó $x=4$ và $y=2$

Bài 58. Trích đề học sinh giỏi Hà Tĩnh 2008 - 2009

Giải hệ: $\begin{cases} \dfrac{x^4-16}{8x}=\dfrac{y^4-1}{y} \\ x^2-2xy+y^2=8 \end{cases}$

Giải

Điều kiện $x \neq 0, y \neq 0$

Phương trình thứ nhất của hệ có dạng $f\left(\dfrac{x}{2}\right)=f(y) \quad (1)$

Với $f(t)=\dfrac{t^4-1}{t}, t \neq 0$. Ta có $f'(t)=3t^2+\dfrac{1}{t^2}>0$

Suy ra hàm số f đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0), (0;+\infty)$

$\star$ Trên $(-\infty;0)$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{x}{2}=y$, thay vào phương trình thứ hai của hệ thu được: $y^2=8 \Leftrightarrow y=-2\sqrt{2} \Rightarrow x=-4\sqrt{2}$

$\star$ Trên $(0;+\infty)$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{x}{2}=y$, thay vào phương trình thứ hai của hệ thu được: $y^2=8 \Leftrightarrow y=2\sqrt{2} \Rightarrow x=4\sqrt{2}$

Vậy hệ có các nghiệm $(x;y)$ là $\left(2\sqrt{2};4\sqrt{2}\right), \left(-2\sqrt{2};-4\sqrt{2}\right)$

Bài 59. Trích đề học sinh giỏi Cần Thơ 2008 - 2009 vòng 1

Giải hệ: $\begin{cases} y^2-xy+1=0 \\ x^2+y^2+2x+2y+1=0 \end{cases}$

Giải

Thay $y^2+1=xy$ vào phương trình dưới ta được: $x^2+xy+2(x+y)=0 \Leftrightarrow (x+2)(x+y)=0$

Nếu $x=-2$ thì $y=-1$

Nếu $x=-y$ thì $y=\dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}}$

Bài 60. Trích đề học sinh giỏi Quảng Bình 2008 - 2009 vòng 2

Giải hệ: $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+22}-\sqrt{y}=y^2+2y+1 \\ \sqrt{y^2+2y+22}-\sqrt{x}=x^2+2x+1 \end{cases}$

Giải

Điều kiện $x\geq 0, y\geq 0$, $x=0$ hoặc $y=0$ đều không thỏa hệ nên$x>0, y>0$.

Trừ hai phương trình của hệ theo vế ta được

$\sqrt{x^2+2x+22}+\sqrt{x}+x^2+2x+1=\sqrt{y^2+2y+22}+\sqrt{y}+y^2+2y+1$

Phương trình này có dạng $f(x)=f(y)$ với $f(t)=\sqrt{t^2+2t+22}+\sqrt{t}+t^2+2t+1$

Ta có $f'(t)=\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+22}}+\dfrac{1}{2\sqrt{t}}+2t+2>0$

Suy ra f là hàm đồng biến $\Rightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$

Thay vào PT thứ nhất ta có $x^2+2x+1-\sqrt{x^2+2x+22}+\sqrt{x}=0$

Phương trình này có dạng $g(x)=g(1)$ với $g(x)=x^2+2x+1-\sqrt{x^2+2x+22}+\sqrt{x}=0$,

$g'(x)=2x+2+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+22}}>2-\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+22}}>0$

(Vì $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+22}}\leq\dfrac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2x+22}}=\dfrac{\sqrt{x^2+2x+1}}{\sqrt{x^2+2x+22}}<1)\Rightarrow$ g là hàm đồng biến nên $g(x)=g(1)\Leftrightarrow x=1$

Vậy phương trình có nghiệm là $(x;y)=(1;1)$

Bài 61

Giải hệ phương trình $\begin{cases} |xy-4|=8-y^2 \\ xy=2+x^2 \end{cases}$

Giải

Nếu xy$\geq$4 ta có hệ $\begin{cases} xy-4=8-y^2 \ (1) \\ xy=2+x^2 \ \ (2)\Rightarrow x^2\geq 2 \end{cases}$

Từ (2) $\rightarrow$ x # 0 và $y=\dfrac{2+x^2}{x}$

Thay vào phương trình (1) $\rightarrow$ $2+x^2-4=8-\left(\dfrac{2+x^2}{x}\right)^2$

Hay $x^4-3x^2+2=0\rightarrow(x^2-2)(x^2-1)=0$

Mà $x^2\geq 2\rightarrow x^2=2$

Hệ có 2 nghiệm: (x,y) là $(\sqrt{2};\sqrt{8});(-\sqrt{2};-\sqrt{8})$

Nếu xy < 4 ta suy ra $x^2<2$

Và ta có: $\begin{cases} 4-xy=8-y^2 \\ xy=2+x^2 \end{cases}\Rightarrow 4-2-x^2=8-\left(\dfrac{2+x^2}{x}\right)\Leftrightarrow 2(2-x^2)=0\Leftrightarrow \ x^2=2$ (loạ

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm như trên.

Bài 62

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 - 4x + 1 (1) \\ xy + x + 1 = x^2 \quad (2) \end{cases}$

Lời giải

Ta thấy x = 0 không thoả mãn phương trình (2)

Với x # 0 từ (2) $\rightarrow$ y + 1 = $\frac{x^2-1}{x}$ thay vào (1) ta có phương trình:

Hệ phương trình có 2 nghiệm (x;y) là (1;-1); $\left(-2;-\frac{5}{2}\right)$

Bài 63

Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y (2) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 1; y \geq 0$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 - (x+y) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + xy\right) - \left(2xy + y^2\right) - \left(x + y\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x+y\right)\left(x - 2y - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0$ (Do có đk có $x + y > 0$)

$\Leftrightarrow x = 2y + 1$

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$\left(2y+1\right)\sqrt{2y} - y\sqrt{2y} = 2(2y+1) - 2y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2y}\left(y+1\right) = 2\left(y+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(y+1\right)\left(\sqrt{2y} - 2\right) = 0 \Leftrightarrow y = 2 \quad \text{(Do } y \geq 0)$$

Với $y = 2$ ta có $x = 2y + 1 = 5$

Bài 64

Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 = \left(5x+4\right)\left(4-x\right) & (1) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 = 0 & (2) \end{cases}$

Lời giải:

Biến đổi phương trình (2) về dạng:

$$y^2 - \left(4x+8\right)y - 5x^2 + 16x + 16 = 0$$

$$\Delta' = 9x^2 \rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 5x+4 \\ y = 4-x \end{array}\right.$$

Với y = 5x + 4 thay vào phương trình (1) $\rightarrow$ $(5x+4)^2 = (5x+4)(4-x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{4}{5} \\ x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x, y) = \left(-\dfrac{4}{5}; 0\right) \\ (x, y) = (0, 4) \end{array}\right.$$

Với y = 4 - x thay vào (1) ta được:

$$(4 - x)^2 = (5x + 4)(4 - x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \Rightarrow y = 4 \end{array}\right.$$

Hệ có 3 nghiệm (x,y) là:

(0;4); (4;0); (- $\frac{4}{5}$; 0).

Bài 65

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 1 + y(y + x) = 4y & (1) \\ (x^2 + 1)(y + x - 2) = y & (2) \end{cases}$

Lờigiải

Ta thấy y = 0 không thoả mãn phương trình (1) nên hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 = 1}{y} + y + x = 4 \\ \dfrac{x^2 = 1}{y}(y + x - 2) = 1 \end{cases}$$

Đặt $u = \dfrac{x^2 + 1}{y}$, $v = y + x - 2$ ta có hệ $\begin{cases} u + v = 2 \\ uv = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (u = 1; v = 1)$

Ta có hệ $\begin{cases} x^2 + 1 = y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x = 1; y = 2) \\ (x = -2; y = 5) \end{cases}$ Hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm

Bài 66

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4xy + (x^2 + y^2) + \dfrac{3}{(x + y)^2} = 7 \\ 2x + \dfrac{1}{x + y} + (x - y) = 3 \end{cases}$

Đặt $u = x + y + \dfrac{1}{x + y}$ $(|u| \geq 2)$

V= x -y ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3u^2 + v^2 = 13 \\ u + v = 3 \end{cases}$

Giải hệ (với lưu ý $|u| \geq 2$ ta có *u = 2 ; v = 1*

Ta có Hệ phương trình $\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x + y} = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ *(x = 1 ; y = 0)*

vậy Hệ phương trình có nghiệm: *(x,y)* là *(1;0)*

Bài 67

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 5x = y^3 - 5y & (1) \\ x^8 + y^4 = 1 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Từ phương trình (2) $\rightarrow x^8 \le 1; y^4 \le 1$

$\Rightarrow |x| \le 1$; $|y| \le 1$

xét hàm $f(t) = t^3 - 5t$ $\quad t \in [-1 ; 1]$

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 5 < 0 \quad \forall\ t \in [-1 ; 1]$

$\Rightarrow$ hàm $f(t)$ $\rightarrow x = y$ thay vào phương trình (2) $\rightarrow x^8 + x^4 - 1 = 0$

Đặt $a = x^4 \ge 0$ ta có $a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = x = \pm\sqrt[4]{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

Loại 2: Hệ đối xứng loại 2 mà khi giải thường dẫn đến một trong 2 phương trình của hệ có dạng $f(x) = 0$ hoặc $f(x) = f(y)$ Trong đó f là hàm đơn điệu

Bài 68

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2x + 2} = 3y + 1 \end{cases}$

Lời giải

Đặt $a = x - 1$

$b = y - 1$

Ta được hệ $\begin{cases} a + \sqrt{a^2 + 1} = 3^b \\ b + \sqrt{b^2 + 1} = 3^a \end{cases}$

Trừ theo vế của 2 phương trình trên ta được

$a + \sqrt{a^2 + 1} + 3^a = b + \sqrt{b^2 + 1} + 3^b \qquad (3)$

xét hàm $f(x) = t + \sqrt{t^2 + 1} + 3^t$ có $f(\ x) = \dfrac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} + 3^t \ln 3$

và $\sqrt{t^2 + 1} > \sqrt{t^2} \ge -t \rightarrow f(x) > 0 \ \forall t$

$\rightarrow$ f(t) đồng biến trên $|R$

Từ phương trình (3) $\rightarrow$ a = b thay vào phương trình (1) ta có

$$a + \sqrt{a^2 + 1} = 3^a \quad (4)$$

$$\Rightarrow l_n\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right) - a l_n 3 = 0$$

Xét hàm g(a) = $g(a) = l_n\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right) - a l_n 3$

Có: $g'(a) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} - l_n 3 < 1 - l_n 3 < 0 \forall a \in |R$

Nên hàm g(a) nghịch biến và do phương trình (4) có nghiệm a = 0 nên ta có nghiệm ban đầu của hệ là (x = 1; y= 1)

Bài 69

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - \sqrt{y} = 1 & (1) \\ y - \sqrt{z} = 1 & (2) \\ z - \sqrt{x} = 1 & (3) \end{cases}$

Lời giải:

Dễ thấy x > 0, y > 0, z > 0

Không giảm tính tổng quát giả sử : $x \geq y \Rightarrow \sqrt{y} + 1 \geq \sqrt{z} \Rightarrow y \geq z$

Ta lại có $z = \sqrt{x} + 1 \geq \sqrt{y} + 1 = x \Rightarrow x \geq y \geq z \geq x \Rightarrow x = y = z \Rightarrow x - \sqrt{x} - 1 = 0$

Do x dương $\Rightarrow x = \left(\sqrt{5} + 1\right)^2 : 4$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $x = y = z = \dfrac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{4}$

Bài 70

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = y \\ \dfrac{2y^2}{y^2+1} = z \\ \dfrac{2z^2}{z^2+1} = x \end{cases}$

Lời giải:

Nếu $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow z = 0 \rightarrow$ hệ có nghiệm $(x; y; z) = (0; 0; 0)$

Nếu $x \neq 0 \rightarrow y > 0 \rightarrow z > 0 \rightarrow x > 0$

$$y = \frac{2x^2}{x^2+1} \leq \frac{2x^2}{2x} = x$$
$$x = \frac{2z^2}{z^2+1} \leq \frac{2z^2}{2z} = z \Rightarrow y \leq x \leq z \leq y$$
$$z = \frac{2y^2}{y^2+1} \leq \frac{2y^2}{2y} = y \Rightarrow x = y = z = 1$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: (0; 0; 0) và (1; 1; 1)

Bài 71

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y \\ y + \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x \end{cases}$

Lời giải:

Cộng theo vế 2 phương trình của hệ ta có:

$$\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}} = x^2 + y^2$$

Ta có: $\begin{matrix} \sqrt[3]{x^2 - 2x + 9} = \sqrt[3]{(x-1)^2 + 8} \geq 2 \\ \sqrt[3]{y^2 - 2x + 9} = \sqrt[3]{(y-1)^2 + 8} \geq 2 \end{matrix}$

$$\Rightarrow VT \leq \frac{2xy}{2} + \frac{2xy}{2} = 2xy \leq 2|xy| \leq x^2 + y^2$$

Dấu “ = “ khi $\left[\begin{matrix} x = y = 1 \\ x = y = 0 \end{matrix} \right.$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm như trên.

Bài 72

Giải hệ phương trình $\begin{cases} y = -x^3 + 3x + 4 \\ x = -2y^3 - 6y - 2 \end{cases}$

Lời giải:

Hệ đã cho tương đương với: $\begin{cases} y - 2 = -(x+1)^2(x-2) & (1) \\ x - 2 = 2(y+1)^2(y-2) & (2) \end{cases}$

Nếu x > 2 thì từ (1) $\rightarrow$ y = 2 < 0

Điều này mâu thuẫn với phương trình (2) có x - 2 và y - 2 cùng dấu.

Tương tự với $x \leq 2$ ta cũng suy ra điều mâu thuẫn.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x = y = 2$