

ỨNG DỤNG CỦA ĐA THỨC ĐỐI XỨNG SƠ CẤP VÀO GIẢI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC, TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN DẠNG ĐỐI XỨNG

Lê Trung Tín, giáo viên trường THPT Hồng Ngọc 2, tỉnh Đồng Tháp

1. Ứng dụng của đa thức đối xứng sơ cấp hai biến

Với các đa thức đối xứng sơ cấp $s = a + b, p = ab$, ta luôn có:

- $a^2 + b^2 = s^2 - 2p$
- $a^3 + b^3 = s^3 - 3ps$
- $a^4 + b^4 = (s^2 - 2p)^2 - 2p^2$
- $(1 + a)(1 + b) = 1 + s + p$

Sau đây, ta xét đến một số bất đẳng thức cơ bản thể hiện mối quan hệ giữa hai đại lượng s, p để phục vụ cho việc giải toán bất đẳng thức hai biến dạng đối xứng, cực trị của hàm hai biến dạng đối xứng sau này.

Định lí 1. Với $a, b \geq 0$ và $s = a + b, p = ab$, ta có

$$s^2 \geq 4p$$

Dấu “=” xảy ra tại $a = b$

Chứng minh

Ta có:

$$s^2 - 4p = (a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow s^2 \geq 4p$$

Dấu “=” xảy ra tại $a = b$ ■

Định lí 2. Với $s = a + b, p = ab$. Khi đó:

(1) Nếu $0 \leq p \leq 1$ thì $\frac{2 + s}{1 + s + p} \leq \frac{2}{1 + \sqrt{p}}$

(2) Nếu $p \geq 1$ thì $\frac{2 + s}{1 + s + p} \geq \frac{2}{1 + \sqrt{p}}$

Chứng minh

Với $p \geq 0$, xét hiệu:

$$(2 + s)(1 + \sqrt{p}) - 2(1 + s + p) = (\sqrt{p} - 1)(s - 2\sqrt{p})$$

(1) Vì $0 \leq p \leq 1$ nên $(2 + s)(1 + \sqrt{p}) - 2(1 + s + p) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2 + s}{1 + s + p} \leq \frac{2}{1 + \sqrt{p}}$

(2) Vì $p \geq 1$ nên $(2 + s)(1 + \sqrt{p}) - 2(1 + s + p) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 + s}{1 + s + p} \geq \frac{2}{1 + \sqrt{p}}$ ■

Đối với một bài toán bất đẳng thức hai biến dạng đối xứng, cực trị của hàm hai biến dạng đối xứng theo hai biến a, b bằng cách đặt $s = a + b, p = ab$ ta hoàn toàn chuyển bài toán đã cho về một biến theo s hoặc p . Chẳng hạn, ta xét các bài toán sau:

Bài Toán 1. Cho $a, b \geq 0$. Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$$

Hướng dẫn

Đặt $s = a + b, p = ab$, điều kiện $s, p \geq 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$(s^2 - 2p)^2 - 2p^2 \geq p(s^2 - 2p) \Leftrightarrow s^4 - 5s^2p + 4p^2 \geq 0$$

Vì $s^2 - 4p \geq 0$ nên $(s^2 - p)(s^2 - 4p) \geq 0 \Leftrightarrow s^4 - 5s^2p + 4p^2 \geq 0$.

Bất đẳng thức hoàn toàn được chứng minh. Dấu “=” xảy ra tại $a = b$ ■

Bài Toán 2. Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $ab + a + b = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} \leq a^2 + b^2 + \frac{3}{2}$$

Hướng dẫn

Đặt $s = a + b, p = ab$, điều kiện $s, p > 0$.

Từ điều kiện, ta có: $s + p = 3 \Leftrightarrow p = 3 - s$ (1)

Vì $s^2 \geq 4p$ nên (1) $\Rightarrow 3 - s \leq \frac{s^2}{4} \Rightarrow s \geq 2$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\begin{aligned} & \frac{3s^2 + 3s - 6p}{s + p + 1} + \frac{p}{s} \leq s^2 - 2p + \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{3s^2 + 9s - 18}{4} + \frac{3-s}{s} - s^2 - 2s + \frac{9}{2} \leq 0 \quad (do(1)) \\ \Leftrightarrow & s^3 - s^2 + 4s - 12 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (s-2)(s^2 + s + 6) \geq 0 \quad \text{luôn đúng với mọi } s \geq 2 \end{aligned}$$

Bài Toán 3. Cho $a, b \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}\right) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b^2}\right) \leq \frac{1}{16}$$

Hướng dẫn

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$L = a^2b^2 - 16ab + 16(a + b) - 16 \geq 0$$

Đặt $s = a + b, p = ab$, điều kiện $s \geq 2, p \geq 1$.

Khi đó:

$$L = p^2 - 16p + 16s - 16 \geq p^2 - 16p + 32\sqrt{p} - 16 = (\sqrt{p} - 2)^2(p + 4\sqrt{p} - 4) \geq 0 \text{ đúng với mọi } p \geq 1$$

Bài Toán 4. Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4 + b^4}{(a+b)^4} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \geq \frac{5}{8}$$

Hướng dẫn

Đặt $s = a + b, p = ab$, điều kiện $s, p > 0$

Ta có $s^2 \geq 4p \Leftrightarrow \frac{\sqrt{p}}{s} \leq \frac{1}{2}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\begin{aligned} & \frac{(s^2 - 2p)^2 - 2p^2}{s^4} + \frac{\sqrt{p}}{s} - \frac{5}{8} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2p^2}{s^4} - \frac{4p}{s^2} + \frac{\sqrt{p}}{s} + \frac{3}{8} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{p}}{s} \right) \left(\frac{\sqrt{p}}{s} + \frac{3}{2} \right) \left(-\frac{p}{s^2} + \frac{\sqrt{p}}{s} + \frac{1}{4} \right) \geq 0 \text{ đúng với mọi } \frac{\sqrt{p}}{s} \leq \frac{1}{2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Bài Toán 5. Cho các số thực a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 = a + b$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a^3 + b^3 + a^2b + ab^2$$

Hướng dẫn

Đặt $s = a + b, p = ab$

Từ điều kiện, ta có: $s^2 - 2p = s \Leftrightarrow p = \frac{s^2 - s}{2}$ (1)

Vì $s^2 \geq 4p$ nên (1) $\Rightarrow s^2 - 2s \leq 0 \Rightarrow 0 \leq s \leq 2$

Ta có:

$$P = s^3 - 2sp = s^2 \quad (do(1))$$

Vì $0 \leq s \leq 2$ nên $0 \leq P \leq 4$ ■

Bài Toán 6. Cho các số thực a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 + ab = a + b + 1$ và $a + b \neq -1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{ab}{a+b+1}$$

Hướng dẫn

Đặt $s = a + b, p = ab$

Từ giả thiết, ta có: $p = s^2 - s - 1$ (1).

Vì $s^2 \geq 4p$ nên (1) $\Rightarrow 3s^2 - 4s - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq s \leq 2$.

Ta có:

$$P = \frac{p}{s+1} = \frac{s^2 - s - 1}{s+1} \quad (do(1))$$

Xét hàm số $f(s) = \frac{s^2 - s - 1}{s + 1}$ trên đoạn $\left[-\frac{2}{3}; 2\right]$.

Ta có:

$$f'(s) = \frac{s^2 + 2s}{(s + 1)^2}; \quad f'(s) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s = 0 \\ s = -2 \notin \left[-\frac{2}{3}; 2\right] \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

s	$-\frac{2}{3}$	0	2
$f'(s)$		$-$	$+$
$f(s)$	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$

Từ bảng biến thiên, ta có: $\min P = \min_{\left[-\frac{2}{3}; 2\right]} f(s) = f(0) = -1$ ■

Bài Toán 7. Cho các số thực $a, b \neq 0$ thỏa mãn $ab(a + b) = a^2 + b^2 - a - b + 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Hướng dẫn

Đặt $s = a + b, p = ab$, điều kiện $p \neq 0$ Từ điều kiện, ta có: $p = \frac{s^2 - s + 2}{s + 2}$ (1)

Vì $s^2 \geq 4p$ nên (1) $\Rightarrow \frac{s^3 - 2s^2 + 4s - 8}{s + 2} \geq 0 \Rightarrow s < -2; s \geq 2$

Ta có $P = \frac{s}{p} = \frac{s^2 + 2s}{s^2 - s + 2}$ (do(1))

Xét hàm số $f(s) = \frac{s^2 + 2s}{s^2 - s + 2}$ trên nửa khoảng $D = (-\infty; -2) \cup [2; +\infty)$.

Ta có:

$$f'(s) = \frac{-3s^2 + 4s + 4}{(s^2 - s + 2)^2}; \quad f'(s) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s = 2 \\ s = -\frac{2}{3} \notin D \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

s	$-\infty$	-2	$-\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
$f'(s)$		$-$	$-$	0	$-$
$f(s)$	1	$\frac{2}{7}$		2	1

Từ bảng biến thiên, ta có: $\max P = \max_{s \in D} f(s) = f(2) = 2$ ■

Bài Toán 8. Cho các số thực $a, b \neq 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (1 + a) \left(1 + \frac{1}{b}\right) + (1 + b) \left(1 + \frac{1}{a}\right)$$

Hướng dẫn

Đặt $s = a + b, p = ab$, điều kiện $s, p > 0$

Từ điều kiện, ta có: $p = \frac{s^2 - 1}{2}$ (1)

Vì $s, p > 0$ nên (1) $\Rightarrow s > 0$ (2) Vì $s^2 \geq 4p$ nên (1) $\Rightarrow s^2 - 2 \leq 0 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq s \leq \sqrt{2}$ (3)

Từ (2) và (3), suy ra $1 < s \leq \sqrt{2}$

Ta có

$$P = (1 + s + p) \left(\frac{s}{p}\right) = \frac{s^2 + s}{s - 1} \quad (\text{do(1)})$$

Xét hàm số $f(s) = \frac{s^2 + s}{s - 1}$ trên nửa khoảng $D = (1; \sqrt{2}]$.

Ta có:

$$f'(s) = \frac{s^2 - 2s - 1}{(s - 1)^2}$$

$$f'(s) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s = 1 + \sqrt{2} \notin D \\ s = 1 - \sqrt{2} \notin D \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

s	1	$\sqrt{2}$
$f'(s)$		-
$f(s)$	$+\infty$	$4 + 3\sqrt{2}$

Từ bảng biến thiên, ta có: $\min P = \min_{s \in D} f(s) = f(\sqrt{2}) = 4 + 3\sqrt{2}$ ■

Bài Toán 9. (ĐH KD 2009) Cho các số thực không âm a, b thỏa mãn $a + b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (4a^2 + 3b)(4b^2 + 3a) + 25ab$$

Hướng dẫn

Đặt $s = a + b, p = ab$, điều kiện $s, p \geq 0$

Từ điều kiện, ta có: $s = 1$ (1)

Vì $s^2 \geq 4p$ nên (1) $\Rightarrow 0 \leq p \leq \frac{1}{4}$

Ta có

$$P = 16p^2 + 12(s^3 - 3ps) + 34p = 16p^2 - 2p + 12 \quad (\text{do(1)})$$

Xét hàm số $f(p) = 16p^2 - 2p + 12$ trên đoạn $D = \left[0; \frac{1}{4}\right]$.

Ta có:

$$f'(p) = 32p - 2; \quad f'(p) = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{16} \in D$$

Bảng biến thiên:

$f'(p)$	-	0	+
	12		$\frac{25}{2}$
$f(p)$			

Vậy, $\min P = \min_{p \in D} f(p) = f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{191}{16}$ và $\max P = \max_{p \in D} f(p) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2}$ ■

Bài Toán 10. Cho các số thực a, b không đồng thời bằng 0 và thỏa mãn $a + b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{a^2}{b^2 + 1} + \frac{b^2}{a^2 + 1}$$

Hướng dẫn

Đặt $s = a + b, p = ab$, điều kiện $s^2 - 2p \neq 0$

Từ điều kiện, ta có: $s = 1$ (1)

Vì $s^2 \geq 4p$ nên (1) $\Rightarrow p \leq \frac{1}{4}$

Ta có

$$P = \frac{1}{s^2 - 2p} + \frac{(s^2 - 2p)^2 - 2p^2 + s^2 - 2p}{p^2 + s^2 - 2p + 1} = \frac{1}{1 - 2p} - \frac{2p + 2}{p^2 - 2p + 2} + 2 \quad (do(1))$$

Xét hàm số $f(p) = \frac{1}{1 - 2p} - \frac{2p + 2}{p^2 - 2p + 2} + 2$ trên nửa khoảng $D = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$.

Ta có:

$$f'(p) = \frac{10p(p^3 - 3p + 2)}{(1 - 2p)^2(p^2 - 2p + 2)^2}; \quad f'(p) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \notin D \\ p = 0 \in D \\ p = -2 \in D \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

p	$-\infty$	-2	0	$\frac{1}{4}$	
$f'(p)$	+	0	-	0	+
$f(p)$					

Vậy, $\min P = \min_{p \in D} f(p) = f(0) = 2$ và $\max P = \max_{p \in D} f(p) = f(-2) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{12}{5}$ ■

Bài Toán 11. Cho các số thực a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{\sqrt{b+1}} + \frac{b}{\sqrt{a+1}}$$

Hướng dẫn

Đặt $s = a + b, p = ab$

Từ điều kiện, ta có: $p = \frac{s^2 - 1}{2}$ (1)

Vì $s^2 \geq 4p$ nên $s^2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq s \leq \sqrt{2}$.

Ta có:

$$P^2 = \frac{-s^3 + 3s + 2}{s^2 + 2s + 1} + \frac{\sqrt{2}(s^2 - 1)}{|s + 1|}, \quad \text{với } s \neq -1$$

- Nếu $-1 < s \leq \sqrt{2}$ thì $P^2 = (\sqrt{2} - 1)s + 2 - \sqrt{2}$. Khi đó

$$\begin{cases} P^2 \leq 4 - 2\sqrt{2} \\ P^2 > 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Suy ra, $\max P = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$, đạt tại $s = \sqrt{2}$ hay $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- Nếu $-\sqrt{2} \leq s < -1$ thì $P^2 = -(\sqrt{2} + 1)s + 2 + \sqrt{2}$. Khi đó: Khi đó

$$\begin{cases} P^2 \leq 4 + 2\sqrt{2} \\ P^2 > 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Suy ra, $\min P = -\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$, đạt tại $s = -\sqrt{2}$ hay $a = b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ■

2. Ứng dụng của đa thức đối xứng sơ cấp ba biến

Với các đa thức đối xứng sơ cấp $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$, ta luôn có:

- $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) = pq - 3r$
- $ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) = p^2q - 2q^2 - pr$
- $(a + b)(a + c) + (b + c)(b + a) + (c + a)(c + b) = p^2 + q$
- $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q$
- $a^3 + b^3 + c^3 = p^3 - 3pq + 3r$
- $a^4 + b^4 + c^4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr$
- $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = q^2 - 2pr$
- $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = q^3 - 3pqr + 3r^2$

Sau đây, ta xét đến một số bất đẳng thức cơ bản thể hiện mối quan hệ giữa ba đại lượng p, q, r để phục vụ cho việc giải toán bất đẳng thức ba biến đối xứng, cực trị của hàm ba biến đối xứng sau này.

Định lí 1. Với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$, ta có

$$p^2 \geq 3q$$

Chứng minh

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 3(ab + bc + ca) \Leftrightarrow p^2 \geq 3q$$

Dấu “=” xảy ra tại $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$. (Qui ước nếu mẫu bằng 0 thì tử bằng 0) ■

Định lí 2. Với $a, b, c \geq 0$ và $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$, ta có

$$(1) p^3 \geq 27r$$

$$(2) q^3 \geq 27r^2$$

$$(3) q^2 \geq 3pr$$

$$(4) pq \geq 9r$$

$$(5) r \geq \frac{p(4q - p^2)}{9} \text{ (bất đẳng thức Schur)}$$

$$(6) 2p^3 + 9r \geq 7pq$$

Chứng minh

(1) Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$(a + b + c)^3 \geq 27abc \Leftrightarrow p^3 \geq 27r$$

Dấu “=” xảy ra tại $a = b = c$.

(2) Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$(ab + bc + ca)^3 \geq 27a^2b^2c^2 \Leftrightarrow q^3 \geq 27r^2$$

Dấu “=” xảy ra tại $a = b = c$.

(3) Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$q^2 = (ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2(a + b + c)abc \geq 3(a + b + c)abc = 3pr$$

Dấu “=” xảy ra tại $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$. (Qui ước nếu mẫu bằng 0 thì tử bằng 0)

(4) Từ (2) và (3), ta có: $p^3q^3 \geq 9^3r \Leftrightarrow pq \geq 9r$

Dấu “=” xảy ra tại $a = b = c$.

(5) Trước hết, ta chứng minh rằng với $a, b, c \geq 0$, ta luôn có:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$$

Thật vậy, không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c$. Đặt $x = a - b, y = b - c$. Bất đẳng thức viết lại dưới dạng

$$c(x + y)y - (c + y)xy + (c + x + y)x(x + y) \geq 0 \Leftrightarrow c(x^2 + xy + y^2) + x^2(x + 2y) \geq 0$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì c, x, y đều không âm.
 Dấu “=” xảy ra tại $a = b = c$, hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị.
 Áp dụng kết quả trên ta có:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 3abc &\geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \\ \Leftrightarrow 9abc &\geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca) - (a+b+c)^3 \\ \Leftrightarrow 9r &\geq 4pq - p^3 \end{aligned}$$

(6) Từ (1) và (6), ta có: $p^3 + 9r = p.p^2 + 9r \geq 3pq + 4pq - p^3 \Leftrightarrow 2p^3 + 9r \geq 7pq$
 Dấu “=” xảy ra tại $a = b = c$. ■

Đối với một bài toán bất đẳng thức ba biến đối xứng, cực trị của hàm ba biến đối xứng ta hoàn toàn biểu diễn được qua các đa thức đối xứng sơ cấp p, q, r . Chẳng hạn, ta xét các bài toán sau:

Bài Toán 1. (Darij Grinberg, Ms, 2004) Cho các số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$$

Hướng dẫn

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$
 Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$p^2 - 2q + 2r + 1 \geq 2q \Leftrightarrow 2r + 1 \geq 4q - p^2$$

Theo AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned} 2r + 1 &\geq \frac{3r}{\sqrt[3]{r}} \\ &\geq \frac{9r}{p} \text{ (do } \frac{p^3}{27} \geq r) \\ &\geq 4q - p^2 \text{ (theo bất đẳng thức Schur)} \end{aligned}$$

Bài Toán 2. (AMPO 2004) Cho 3 số thực dương a, b, c , chứng minh rằng:

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca)$$

Hướng dẫn

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$
 Đặt $P = (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) - 9(ab + bc + ca)$.
 Suy ra

$$\begin{aligned} P &= 8 + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + a^2b^2c^2 - 9(ab + bc + ca) \\ &= 8 + 4(p^2 - 2q) + 2(q^2 - 2pr) + r^2 - 9q = 4p^2 + 2q^2 - 17q - 4pr + r^2 + 8 \end{aligned}$$

Sử dụng AM-GM và Schur, ta được:

$$r^2 + 2 \geq 3\sqrt[3]{r^2} \geq \frac{9r}{p} \geq 4q - p^2$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
 P &\geq 3p^2 + 2q^2 - 13q - 4pr + 6 \geq 3p^2 + 2q^2 - 13q - \frac{4}{3}q^2 + 6 \\
 &= 3p^2 + \frac{2}{3}q^2 - 13q + 6 \geq 9q + \frac{2}{3}q^2 - 13q + 6 \\
 &= \frac{2}{3}q^2 - 4q + 6 \\
 &= \frac{2q^2 - 12q + 18}{3} \\
 &= \frac{2(q-3)^2}{3} \geq 0
 \end{aligned}$$

Bài Toán 3. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{3x}{x^2 + 2yz} + \frac{3y}{y^2 + 2zx} + \frac{3z}{z^2 + 2xy}$$

Hướng dẫn

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$

Bất đẳng thức đã cho viết lại dưới dạng:

$$\begin{aligned}
 a + b + c &\geq 3abc \left(\frac{1}{2a^2 + bc} + \frac{1}{2b^2 + ca} + \frac{1}{2c^2 + ab} \right) \\
 \Leftrightarrow \left(a - \frac{3abc}{2a^2 + bc} \right) + \left(b - \frac{3abc}{2b^2 + ca} \right) + \left(c - \frac{3abc}{2c^2 + ab} \right) &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{2a(a^2 - bc)}{2a(a^2 - bc)} + \frac{2b(b^2 - ca)}{2b(b^2 - ca)} + \frac{2c(c^2 - ab)}{2c(c^2 - ab)} &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{2a^2 + bc}{3a^3 - a(2a^2 + bc)} + \frac{2b^2 + ca}{3b^3 - b(2b^2 + ca)} + \frac{2c^2 + ab}{3c^3 - c(2c^2 + ab)} &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{2a^2 + bc}{3a^3} + \frac{2b^2 + ca}{3b^3} + \frac{2c^2 + ab}{3c^3} &\geq a + b + c
 \end{aligned}$$

Sử dụng Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{3a^3}{2a^2 + bc} + \frac{3b^3}{2b^2 + ca} + \frac{3c^3}{2c^2 + ab} \geq 3 \cdot \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc}$$

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$

Ta đi chứng minh:

$$\begin{aligned}
 3 \cdot \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc} \geq a + b + c &\Leftrightarrow 3(p^2 - 2q)^2 \geq p[2(p^3 - 3pq + 3r) + 3r] \\
 \Leftrightarrow p^4 - 6p^2q + 12q^2 &\geq 9pr \Leftrightarrow (p^2 - 3q)^2 + 3(q^2 - 3pr) \geq 0
 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do $q^2 - 3pr \geq 0$. Bài toán được chứng minh hoàn toàn

Qua các bài toán trên, ta thấy việc sử dụng các đa thức đối xứng sơ cấp trong chứng minh bất đẳng thức có ưu điểm là không tốn nhiều thời gian để nghĩ đến một cách chứng minh đặc biệt nào đó, không đòi hỏi nhiều kỹ năng.

Tiếp theo, ta xét đến các bài toán bất đẳng thức đối xứng có điều kiện:

Bài Toán 4. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \geq 2(ab + bc + ca)$$

Hướng dẫn

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\Leftrightarrow (p^2 - 2q) + p \geq 2q$$

$$\Leftrightarrow 4q \leq p^2 + p$$

Ta có bất đẳng thức Schur, ta có

$$p^3 - 4qp + 9r \geq 0 \Leftrightarrow 4q \leq \frac{p^3 + 9}{p}$$

Cần chứng minh

$$p^2 + p \geq \frac{p^3 + 9}{p}$$

$$\Leftrightarrow (p - 3)(p + 3) \geq 0 \quad (\text{đúng do } p \geq 3) \quad \blacksquare$$

Bài Toán 5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a + b + c + \frac{6}{ab + bc + ca} \geq 5$$

Hướng dẫn

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$

Ta có: $p \geq 3$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$L = p + \frac{6}{q} \geq 5$$

Nếu $4q - p^2 < 0 \Leftrightarrow p \geq 2\sqrt{q}$ thì

$$L \geq \sqrt{q} + \sqrt{q} + \frac{6}{q} \geq 3\sqrt[3]{6} > 5$$

Nếu $4q - p^2 \geq 0$ thì theo bất đẳng thức Schur, ta có:

$$1 = r \geq \frac{p(4q - p^2)}{9} \geq \frac{4q - p^2}{3} \Rightarrow \frac{1}{q} \geq \frac{4}{3 + p^2} \quad \blacksquare$$

Bài Toán 6. (VMO 2006 Bảng B) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq 2(a + b + c)$$

Hướng dẫn

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$

Ta có: $xyz = 1$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(xy + yz + zx) \quad (1)$$

Đặt $p = x + y + z, q = xy + yx + zx, r = xyz = 1$

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow p^2 - 2q + 3 \geq 2q \Leftrightarrow \frac{4q - p^2}{3} \leq 1 \quad (*)$

Ta có: $p^3 \geq 27r \Rightarrow p \geq 3$

Nếu $4q - p^2 \leq 0$ thì $(*)$ luôn đúng.

Nếu $4q - p^2 > 0$ thì theo bất đẳng thức Schur, ta có:

$$1 = r \geq \frac{p(4q - p^2)}{9} \geq \frac{4q - p^2}{3} \quad (**)$$

Vậy $(*)$ luôn đúng do $(**)$

Bài Toán 7. (Balkan MO) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 12 \geq 3(a + b + c) + 3(ab + bc + ca)$$

Hướng dẫn

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$

Bất đẳng thức tương đương:

$$\begin{aligned} 2(p^2 - 2p) + 12 &\geq 3p + 3q \\ \Leftrightarrow 2p^2 - 3p + 12 &\geq 7q. \\ \Leftrightarrow q &\leq \frac{2p^2 - 3p + 12}{7}. \end{aligned}$$

Mặt khác ta có bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} p^3 - 4qp + 9r &\geq 0 \\ \Leftrightarrow q &\leq \frac{p^3 + 9}{4p} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{p^3 + 9}{4p} &\leq \frac{2p^2 - 3p + 12}{7} \\ \Leftrightarrow (p - 3)(p^2 - 9p + 21) &\geq 0 \text{ (luôn đúng do } p \geq 3) \end{aligned}$$

Bài Toán 8. (Balkan MO 2011) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(b^5 + b^4 + b^3 + b^2 + b + 1)(c^5 + c^4 + c^3 + c^2 + c + 1) \geq 8(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1)$$

Hướng dẫn

Bất đẳng thức tương đương

$$(a^3 + 1)(b^3 + 1)(c^3 + 1) \geq 8 \Leftrightarrow (a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab) \geq 8 \quad (1)$$

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 8r^2 + q^3 + rp^3 - 6pqr \geq 8 \Leftrightarrow p^3 + q^3 - 6pq \geq 0$$

Theo AM-GM, ta được

$$p^3 + q^3 \geq 2pq\sqrt{pq} \geq 2pq\sqrt{9r} \geq 6pq \Rightarrow p^3 + q^3 - 6pq \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn. ■

Bài Toán 9. Cho 3 số a, b, c dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+b} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{a+b+c}{2(ab+bc+ca)} + \frac{3}{a+b+c}$$

Hướng dẫn

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$

Bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{p^2 + q}{pq - r} \geq \frac{p}{6} + \frac{3}{p} \Leftrightarrow \frac{p^2 + 3}{3p - r} \geq \frac{p^2 + 18}{6p} \Leftrightarrow (p^2 + 18)r \geq 36p - 3p^3$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do $p^2 \geq 3q = 12 \Rightarrow 36p - 3p^3 \leq 0$ ■

Bài Toán 10. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$a^2b + b^2c + c^2a + 3(ab + bc + ca) \leq 1 + 3abc$$

Hướng dẫn

Trước tiên, ta chứng minh bất đẳng thức

$$3(a^2b + b^2c + c^2a) \leq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức AM-GM:

$$\begin{aligned} a^3 + ab^2 &\geq 2a^2b \\ c^3 + a^2c &\geq 2c^2a \\ b^3 + bc^2 &\geq 2b^2c \\ \Rightarrow 3(a^2b + b^2c + c^2a) &\leq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

Áp dụng suy ra

$$a^2b + b^2c + c^2a + 3(ab + bc + ca) - 1 - 3abc \leq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3(ab + bc + ca) - 1 - 3abc$$

Ta chứng minh

$$\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3(ab + bc + ca) - 1 - 3abc \leq 0 \quad (1)$$

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$

(1) tương đương với $p^2 + 7q - 9r - 3 \leq 0 \Leftrightarrow 7q - 9r - 2 \leq 0$

Theo bất đẳng thức Schur, ta có: $r \geq \frac{p(4q - p)}{9} = \frac{4q - 1}{9}$ (do $p = 1$)

Mặt khác, ta có $1^2 = p^2 \geq 3q$ (*)

Khi đó:

$$7q - 9r - 2 \leq 3q - 1 \leq 0 \quad (\text{do } (*))$$

Bài Toán 11. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh

$$abc + \frac{12}{ab + bc + ca} \geq 5$$

Hướng dẫn

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$. Ta có: $p = 3$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$L = r + \frac{12}{q} \geq 5$$

Theo bất đẳng thức Schur, ta có:

$$r \geq \frac{p(4q - p^2)}{9} = \frac{4q}{3} - 3 \quad \text{Do } p = 3$$

Khi đó:

$$L \geq \frac{4q}{3} + \frac{12}{q} - 3 \stackrel{AM-GM}{\geq} 2\sqrt{\frac{4q}{3} \cdot \frac{12}{q}} - 3 = 8 - 3 = 5$$

Bài Toán 12. (Vasile Cirtoaje, MS, 2005) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$5(a + b + c) + \frac{3}{abc} \geq 18$$

Hướng dẫn

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$

Từ điều kiện, ta có: $p^2 = 2q + 3 \Rightarrow p > \sqrt{3}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$L = 5p + \frac{3}{r} - 18 \geq 0$$

Ta luôn có: $q^2 \geq 3pr \Leftrightarrow \frac{1}{r} \geq \frac{3p}{q^2}$.

Do đó:

$$L \geq 5p + \frac{9p}{q^2} - 18 = 5p + \frac{9p}{(p^2 - 3)^2} = \frac{(p - 3)^2(5p^3 + 12p^2 - 3p - 18)}{(p^2 - 3)^2}$$

Bây giờ ta chứng minh $5p^3 + 12p^2 - 3p - 18 > 0$ với mọi $p \geq \sqrt{3}$. Thật vậy, ta có:

$$5p^3 + 12p^2 - 3p - 18 = p^2 \left(5p + 12 - \frac{3}{p} - \frac{18}{p^2} \right) > 3(5\sqrt{3} + 12 - \sqrt{3} - 6) = 3(4\sqrt{3} + 6) > 0$$

Vậy, ta có $L \geq 0$ ■

Sau đây, ta xét đến ứng dụng của đa thức đối xứng sơ cấp p, q, r vào giải các bài toán cực trị ba biến đối xứng:

Bài Toán 13. (ĐH KB - 2010) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Hướng dẫn

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$

Khi đó $P = 3q^2 - 6pr + 3q + 2\sqrt{1 - 2q}$

Ta có các bất đẳng thức sau:

$$q^2 \geq 3pr \Rightarrow -6pr \geq -2q^2$$

Khi đó:

$$P \geq q^2 + 3q + 2\sqrt{1 - 2q} = f(q)$$

Theo giả thiết, ta có: $1^2 = p^2 \geq 3q \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq q \leq \frac{1}{3}$

Với $q \in \left[0; \frac{1}{3}\right)$, ta có:

$$f'(q) = 2q + 3 - \frac{2}{1 - 2q}, f''(q) = 2 - \frac{2}{(1 - 2q)^3} \leq 0$$

Suy ra, $f'(q)$ là nghịch biến trên $\left[0; \frac{1}{3}\right)$. Do đó: $f'(q) > f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3} - 2\sqrt{3} > 0$.

Vậy, $f(q)$ là đồng biến trên $\left[0; \frac{1}{3}\right)$. Khi đó $P \geq f(0) = 2$

Dấu “=” xảy ra tại $a = b = 0, c = 1$, hoặc $b = c = 0, a = 1$, hoặc $a = c = 0, b = 1$ ■

Bài Toán 14. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa $3(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca = 12$. Tìm GTLN và GTNN của

$$P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} + ab + bc + ca$$

Hướng dẫn

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca$, điều kiện $p > 0, q \geq 0$

Từ điều kiện, ta có:

$$q = \frac{3p^2 - 12}{5} \quad (1)$$

Vì $q \geq 0, p > 0$ nên (1) $\Rightarrow p \geq 2$ (2)

Mặt khác, ta có

$$p^2 \geq 3q \Leftrightarrow p^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq p \leq 3 \quad (3)$$

Kết hợp (2) và (3), ta có: $2 \leq p \leq 3$ Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{p^2 - 2q}{5} + q \\ &= \frac{1}{5} \left(3p^2 - p - 12 + \frac{24}{p} \right) \quad (Do(1)) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(p) = \frac{1}{5} \left(3p^2 - p - 12 + \frac{24}{p} \right)$ liên tục trên đoạn $[2; 3]$

Ta có: $f'(p) = \frac{1}{5} \left(6p - 1 - \frac{24}{5p^2} \right); f''(p) = \frac{1}{5} \left(6 + \frac{48}{5p^3} \right) > 0, \forall p \in [2; 3]$

Suy ra, $f'(p)$ là đồng biến trên đoạn $[2; 3]$ và $f'(p) \geq f'(2) = 1 > 0$

Vậy, $f(p)$ là đồng biến trên đoạn $[2; 3]$ và $f(2) \leq f(p) \leq f(3) \Leftrightarrow 2 \leq P \leq 4$ ■

Bài Toán 15. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a + b + c) = 3$. Tìm GTLN và GTNN của

$$P = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - (ab + bc + ca)$$

Hướng dẫn

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca$

Từ điều kiện, ta có:

$$q = \frac{3p^2 - 2p - 3}{6} \quad (1)$$

Vì $p^2 \geq 3q$ nên $p^2 - 2p - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq p \leq 3$

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= (p^2 - 2q)^2 - q \\ &= \frac{1}{18} (-p^2 + 30p + 27) \quad (Do(1)) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(p) = \frac{1}{18} (-p^2 + 30p + 27)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$

Ta có: $f'(p) = \frac{1}{18} (-2p + 30) > 0, \forall p \in [-1; 3]$

Vậy, $f(p)$ là đồng biến trên đoạn $[-1; 3]$ và $f(-1) \leq f(p) \leq f(3) \Leftrightarrow -\frac{2}{9} \leq P \leq 6$ ■

Cảm ơn thầy Lê Trung Tín gửi đến www.laisac.page.tl